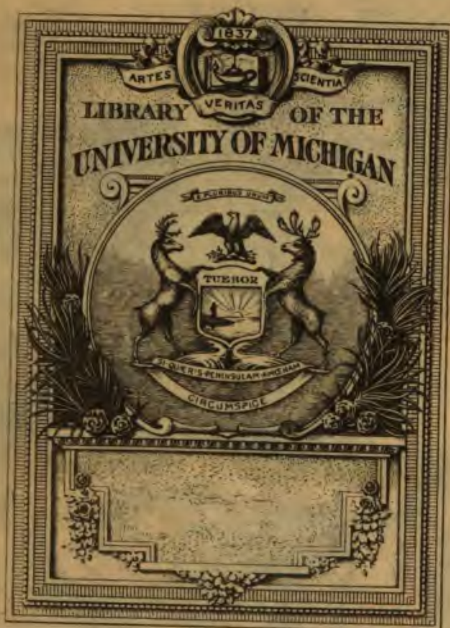
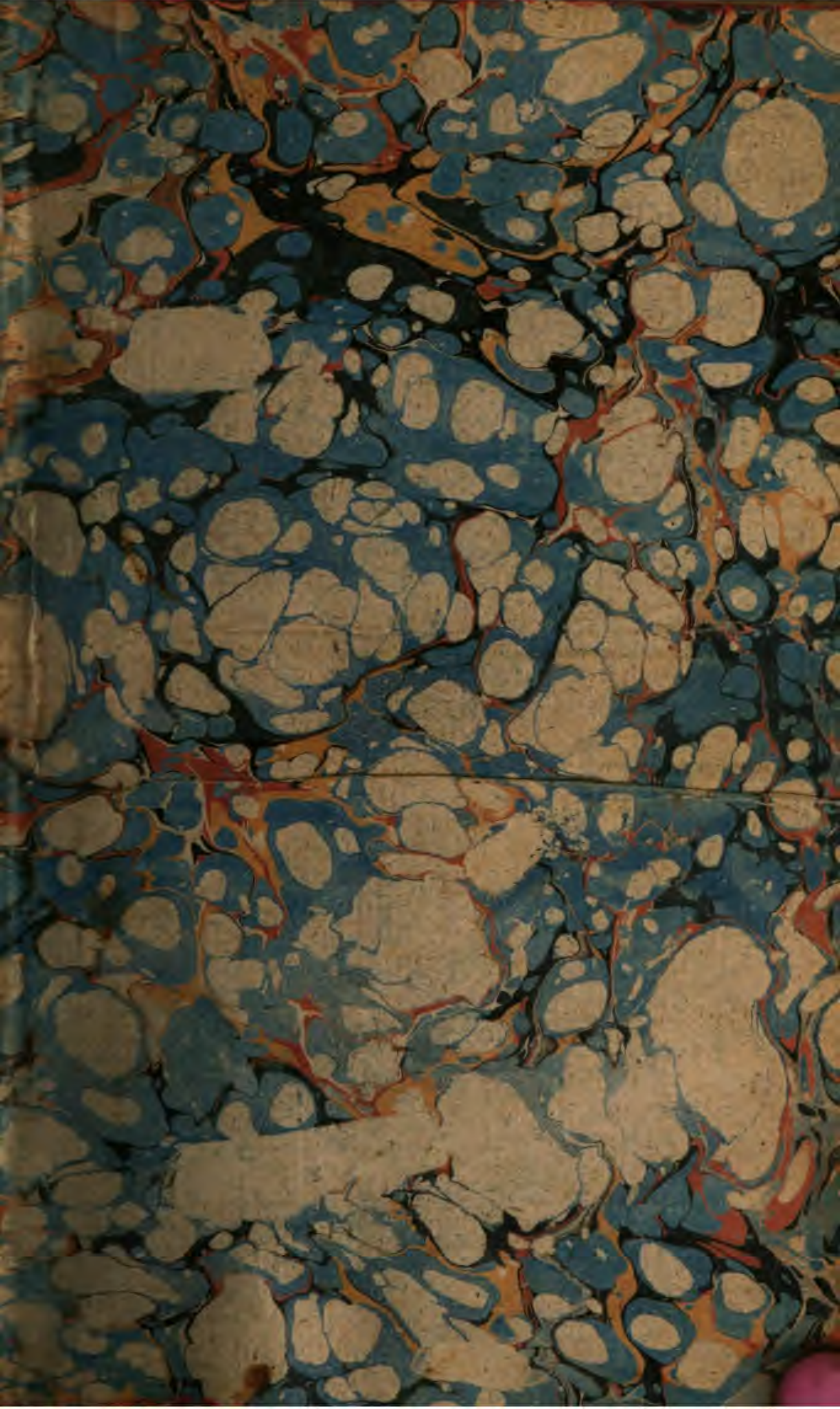

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Anfangsgründe

4 Bde/ S.–

Anfangsgründe
der
Mathematik,
zum Gebrauche
der mathematischen Schule des kaiserl. königl.
Artilleriekorps.

Erster Teil.
Die Rechenkunst und Algebra.

Verfaßt
von Leopold Unterberger,
Hauptmann und öffentlichen Lehrer der Meskunst
bei dem kaiserl. königl. Artilleriekorps.



Wien,
gedruckt bey Joh. Thomas Edl. v. Trattnern,
kaiserl. königl. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1774.

Der

Allerdurchlauchtigsten, Grosmächtigsten

Römischen Kaiserin

Maria Theresia,

in

Germanien, zu Hungarn, Böheim, Dalmatien, Croatien, Slavonien, Galizien, Lodomerien ꝛc. Apostolische Königin; Erzherzogin zu Oesterreich; Herzogin zu Burgund, zu Steyer, zu Kärnten, und zu Crain; Grosfürstin zu Siebenbürgen; Markgräfin zu Mähren; Herzogin zu Braband, zu Limburg, zu Luxenburg, und zu Geldern, zu Würtemberg, zu Ober- und Niederschlesien, zu Mayland, zu Mantua, zu Parma, zu Plazenz, zu Quastalla, zu Ausschwitz, und Zator; Fürstin zu Schwaben; gefürstete Gräfin zu Habsburg, zu Flandern, zu Tyrol, zu Hennegau, zu Kyburg, zu Görz, und zu Gradiska; Markgräfin des Heil. Römischen Reichs zu Burgau, zu Ober- und Niederlausnitz; Gräfin zu Namur; Frau auf der Windischen March, und zu Mecheln, ꝛc. Herzogin zu Lotharingen und Baar, Grosherzogin zu Toskana, ꝛc. ꝛc.

Allergnädigste

Kaiserin, Königin,

Erblandesfürstin und Frau Frau!

Mit der allertiefesten Erfurcht nähere ich mich dem geheiligten Throne **Euer Kaiserlich-Königlich-Apostolischen Majestät**, um dieses geringe Werk als eine Frucht meiner schwachen Arbeiten zu Füssen zu legen, und das innere Gefühl meiner eigenen Unwürdigkeit würde mir nicht verstatten, diesen kühnen Schritt zu wagen, wenn mich nicht zugleich die Ueberzeigung von der unbegränzten Nachsicht, womit **Euer Kaiserlich-Königlich-**

glich- Apostolische Majestät auch schwache Kräfte zu unterstützen geruhen, aufgemuntert, und mir Hoffnung gegeben hätte, daß meine Arbeit, so blos die Beförderung Allerhöchstdero Dienstes zum Zweck hat, wenn sie auch gleich demselben nicht vollständig erreichen sollte, doch nicht ungnädig dörfte aufgenommen werden.

Seit der Zeit, daß mir die Besorgung der Mathematischen Schule bei

Aller-

Allerhöchstdero Artilleriekorps aufgetragen wurde, erhielte ich von dem dermaligen General-Artilleriedirektor Fürsten von Kinsky, dessen unermüdete Vorsicht mit so einleuchtendem Vorteile zur Beförderung dieses wichtigen Teiles des Kriegsstandes wachet, den ausdrücklichen Befehl, ein eigenes und zu dem wahren Zwecke dieser Schule besonders eingerichtetes Lehrbuch zu verfassen, so bei dem künftigen Unterrichte in derselben zum Grunde geleget werden

 soll-

sollte. Diesem Befehl habe ich nun nach Maasgebung meiner schwachen Kräften ein Genügen zu leisten getrachtet, und wenn ich in irgend einem Teile meiner Arbeit einigen Beifall hoffen darf, so ist es blos aus dem Grunde, weil ich darin der mir von ihm zugleich gegebenen Vorschrift, und Anleitung auf das gewissenhafteste zu folgen beflissen gewesen bin. Dahero habe ich auch bei der Anlage, und Ausführung desselben keines Weges den glänzenden

Schein

Schein einer tiefsinnigen, und oftmals unfruchtbaren Gelehrsamkeit, sondern blos den unmittelbaren Einfluß der Mathematischen Wissenschaften in das wesentliche des Artilleriedienstes vor Augen gehabt, und alles übrige so mir mit diesem Zwecke nicht übereinstimmig geschienen, als fremde, und überflüßig angesehen.

Da ich mir, meiner aufrichtigen Absicht ohnerachtet, doch nicht schmeich-

len

len darf, diesem Werke denjenigen Grad der Vollkommenheit gegeben zu haben, so mit meinem Wunsche übereinstimmig wäre, so bleibet mir nichts anders als die allerunterthänigste Bitte übrig, daß **Euer Kaiserlich-Königlich-Apostolische Majestät** diese geringe Frucht meiner Bemühungen nicht nach ihrem innern Werth, sondern blos nach der Lauterkeit der Absicht, welche die Beförderung **Dero allerhöchsten** Diensts ist, abzuwägen **allergnä**-

digst

digst geruhen möchten. Denn ob ich gleich in dem Umfange, und Schärfe gelehrter Einsichten sehr vielen nachzustehen genöthiget, und bereit bin, so kann ich doch in dem feurigen Eifer, womit ich alle meine Kräfte und mein Leben dem Dienst **Euer Kaiserlich-Königlich- Apostolischen Majestät** geweihet habe, von keinem übertroffen werden, und niemals wird sich jemand einer unverfälschtern Treue rühmen können, als diejenige ist,

mit

mit der ich in tiefester Unterwerfung ersterbe

Euer Kaiserlich- Königlich-
Apostolischen Majestät

Allerunterthänigster, allergehorsamster
Leopold Unterberger
Hauptmann.

Vorrede.

Es ist bereits ein so ansehnlicher Vorrat von gedruckten Lehrbüchern und Anfangsgründen der Mathematik vorhanden, daß ich billig Bedenken getragen haben würde, die Zahl davon zu vermehren, wenn mich nicht überwiegende Gründe dazu bewogen hätten. Die Absichten, zu deren Erfüllung dieses Werk bestimmet ist, schienen mir eine ganz andere Anlage und Einrichtung zu erfordern, als bei den meisten derselben angetroffen wird, und es blieb mir, ohngeachtet meiner grossen Abneigung von Vermehrung dieser Gattung von Schriften, dennoch kein anderes Mittel übrig, als die Verfassung desselben auf mich zu nehmen, wenn ich meinem vorgesetzten Zwecke ein Genüge leisten wolte. Ich sehe mich daher genöhtiget, von diesen Absichten und Bewegungsgründen einige Rechenschaft zu geben, um den Leser in den gehörigen Gesichtspunkte zu setzen, aus welchem ich wünsche, daß er dieses Werk beurteilen möge. Zu gleicher Zeit werde ich auch Gelegenheit haben, zum Gebrauche meiner Zuhörer, auf welche ich vorzüglich mein Absehen richte, einige nicht unerhebliche Erinnerungen beizurücken, deren Erwägung ich ihnen sehr angelegentlich anempfehle.

Da ich zu Führung der mathematischen Schule des Artilleriekorps bestimmet zu werden die Ehre hatte, so war eine von meinen ersten Sorgen, mich um ein bequemes Lehrbuch umzusehen, welches ich bei meinen Vorlesungen zum Grunde legen könte. Bei dieser Wahl

fand

fand ich nun nicht geringe Schwürigkeiten, wovon man sich leicht überzeugen wird, wenn man folgende Eigenschaften, so nach meinem Erachten, ausser der allgemeinen Gründlichkeit und Ordnung des Vortrages, dazu unentbehrlich sind, in Betrachtung ziehet. **Erstens** müssen vorzüglich nur dieienige mathematische Lehren darin abgehandelt werden, welche in die Kriegswissenschaften überhaupt und insbesondere in die Artillerie einen nähern Einflus haben, und die Gründe dazu verschaffen. Alle übrige Warheiten und Teile der Meskunst aber, so in Absicht auf dieselben gänzlich gleichgültig sind, oder in keiner engen und unzertrenlichen Verbindung damit stehen, können eigentlich keinen Plaz darin finden, so erhaben und vortreflich sie auch sonst in anderer Absicht sein mögen, z. B. die astronomische Wissenschaften. **Zweitens.** Aus eben diesem Grunde mus darin das vornehmste Augenmerk auf die Ausübung gerichtet, und folglich die Abhandlung der praktischen Materien volständiger ausgeführet werden, als es gemeiniglich in Werken dieser Art zu geschehen pfleget, ohne iedoch deswegen die Theorie dabei aus den Augen zu setzen. **Drittens.** Weil in dieser Schule teils de Vortrag von den ersten Gründen anfangen mus, teils die Zuhörer ganz wahrscheinlich, wie überal, von verschiedenen Gaben und Fähigkeiten sein dürften, teils auch die Zeit zu Erlernung dieser Wissenschaften nicht übertrieben werden darf, so kan auch das dazu bestimte Lehrbuch nicht alle mathematische Lehren, so zur Artillerie und Kriegskunst brauchbar sein möchten, in ihrem ganzen Umfange, sondern nur die ersten, einfachesten und unentbehrlichsten derselben, folglich im eigentlichen Sinne der Benennung nur die Anfangsgründe davon enthalten, iedoch so, daß iederman, der Neigung und Fähigkeit zu Erlernung höherer mathematischer Entde-

ckungen bei sich verspüret, zulängliche Gründe und Anleitung darin finde, durch eigenen Fleis und Nachdenken almälig weiter fortzurücken und höher hinauf zu steigen, ohne eine fernere mündliche Erklärung dabei unumgänglich nöhtig zu haben. Und viertens. Da dieses Buch zu Vorlesungen, das ist, zu ausführlichern und vollständigern mündlichen Erläuterungen bestimt ist, so sind teils alle nicht unmittelbar in die Kette der Warheiten und Lehren gehörige weitläuftige Ausführungen, Beschreibungen, Folgerungen und Beispiele, teils auch alle zu blosser Ausschmückung des Vortrages dienende rednerische Blumen und Züge, darin gar sehr entbehrlich und folglich der weitern mündlichen Ausführung füglich zu überlassen. Der Vortrag der gesamten Abhandlung mus daher zwar deutlich, bestimt, der Schärfe und Bündigkeit der Begriffe und Beweise und dem geketteten Zusammenhange des Systems angemessen, aber zugleich auch kurz, ungeschmückt und von allen äussern Verzierungen entblösset sein. Solte dahero auch einem Anfänger manches, ohne vorher die Erklärung davon gehöret zu haben, etwas unverständlich scheinen, so darf er doch sicher erwarten, daß ihm durch die nachfolgende mündliche Erklärung und Ausbildung nicht nur alles bei gehöriger Aufmerksamkeit werde faßlich und begreiflich werden, sondern es ihm auch in folgenden Zeiten bei wiederholter Durchlesung gar nicht schwer fallen werde, das Nöhtige davon wieder ins Gedächtnis zurück zu ruffen.

Da ich diese Eigenschaften bei einem Lehrbuche zum Gebrauche der Artillerieschule wünschete, so war es mir schwer, unter den sowohl in deutscher als andern Sprachen bereits vorhandenen Anfangsgründen eines anzutreffen, so dieser Absicht ein Genügen leistete. Die teut-

sche Schriften dieser Art sind, wie es der Augenschein lehret, mehrenteils von Gelehrten verfasset worden, so teils ihr vorzügliches Absehen gar nicht auf die Kriegskunst und Artillerie gerichtet, teils auch davon keine eigentliche Kentnis hatten, und daher auch die wahre Anwendung der Mathematik nicht gründlich zu beurteilen noch viel wesentliches und wirklich brauchbares davon zu sagen wußten. Die meisten derselben pflegen zwar ihrer Unerfahrenheit ohnerachtet, blos weil es eine hergebrachte Gewohnheit so mit sich bringet, von der **bürgerlichen** sowohl als **Kriegsbaukunst**, von der **Artillerie**, von den **Minen** u. d. g. zu reden, aber, wie leicht zu erachten, auf eine solche Art, daß sie dadurch nicht nur ihre Blösse in diesem Stücke aufdecken, sondern auch, welches weit wichtiger ist, unerfahrne Anfänger zu dem irrigen und höchstnachteiligen Wahn verleiten, als wenn würklich die Meskunst keinen wesentlichern Einflus in diese Wissenschaften habe, als aus ihren Schriften zu schließen ist, und folglich von einem Offizier, aller dringenden Anpreisungen ohnerachtet, gar wohl entbehret werden könne. Diese Art von Schriften enthalten folglich nicht dasienige, so für einen dem Kriegsstande gewidmeten Schüler am meisten brauchbar ist, und sind folglich in dieser Absicht zu kurz und abgebrochen, da sie im Gegenteile sich über andere Gegenstände, so unserm Endzwecke ganz fremde sind, am meisten ausdehnen, und folglich in dieser Absicht zugleich zu weitläuftig sind. Es wäre mir also unmöglich gewesen, mich eines solchen Buches zu bedienen, ohne sehr beträchtliche Anmerkungen und Zusätze schriftlich hinzuzufügen, wodurch der ganze abgezielte Nutzen bei Annehmung eines gedruckten Lehrbuches wieder wäre verlohren gegangen; nicht zu gedenken, daß selbst der Zusammenhang und die Folge der Gedanken nicht

wenig dadurch würde gelitten haben. Eben so verhält es sich auch mit den in lateinischer Sprache geschriebenen Büchern, ausgenommen, daß die unvermeidliche Uebersetzung davon die Unbequemlichkeiten noch vermehret hätte. In französischer Sprache hingegen sind zwar allerdings verschiedene Schriften dieser Art zum Gebrauche der Kriegsschulen, insbesondere auch für die Artillerie, ans Licht getreten, allein bei genauer Durchsehung derselben mus man dennoch gestehen, daß durch keine davon die gegenwärtige Absicht volständig erreichet werden könne. Denn teils mangelt es dem Vortrage an der gehörigen Ordnung und Zusammenhange; teils ist derselbe ohne Noht weitläuftig, gedehnt, und der systematischen Kürze eines Lehrbuches keinesweges angemessen; teils sind hin und wieder wichtige und zur volständigen Schärfe unentbehrliche Gründe entweder gänzlich übergangen oder doch unter einander geworfen worden; teils müßte endlich ein solches Buch doch noch erst wieder ins Teutsche übersetzet werden, an dessen staat es mir also viel leichter und schicksamer geschienen, ein eigenes Buch zu verfassen, und darin meinem eigenen Sinne in Abhandlung der mathematischen Lehren, deren Erklärung in der Artillerieschule geschehen muß, zu folgen. Dieses sind demnach die Gründe, so mich zu Verfassung der gegenwärtigen Anfangsgründe bewogen, und zugleich die Einrichtung und Gestalt, worin sie nunmehro erscheinen, bestimmet haben.

Das ganze Werk wird in vier Teile abgeteilet, welche nach dem Maasse, als sie zu Stande kommen, ans Licht treten sollen, um sogleich ohne Verzögerung zu den Vorlesungen angewant zu werden. Der erste Teil enthält die Rechenkunst und Algebra, welche am füglichsten unmittelbar mit einander verbunden werden,

auch in der Ausführung selbsten einander gegenseitig zu mehrerer Deutlichkeit und Begreiflichkeit behülflich sind; daher dann auch eine iede Rechnungsart zu gleicher Zeit sowohl in Ziffern als auch in Buchstaben erkläret wird. Es würde übrigens sehr überflüßig sein, die Unentbehrlichkeit der Algebra mit weitläuftigen Gründen vorzustellen, da der Augenschein die Anfänger lehren wird, daß man in den mathematischen Schriften bei nahe keinen Schrit tuhn könne, ohne derselben gehörig kundig zu sein, und daß in Ermangelung davon teils manche Entdeckungen gänzlich unbekant geblieben wären, teils auch viele Wahrheiten nicht anders als mit einer sehr abmattenden Weitläuftigkeit und durch verdrüsliche Umwege überzeugend vorgetragen werden können.

Der zweyte Teil begreift die theoretische und praktische Geometrie mit Inbegrif der Trigonometrie. Da ich die praktische Lehren dieser Wissenschaft etwas volständiger und gründlicher abzuhandeln willens bin, als sie gemeiniglich in den Anfaugsgründen vorgetragen zu werden pflegen, so behalte ich mir bevor, dem Leser seiner Zeit eine umständlichere Rechenschaft davon zu geben.

In dem dritten Teile sind die mechanische Wissenschaften der angebrachten Meskunst enthalten, unter welchen ich vorzüglich die Mechanik, Statik, Hydrostatik, Hydraulik, und Aerometrie verstehe, und da solche mit der Naturlehre auf das genaueste verbunden sind, so werden auch dieienige Gründe der leztern, auf welche die erstern vorzüglich gebauet sind, nicht übergangen werden. Den übrigen Teilen der angebrachten Meskunst aber, wohin die optische und astronomische Wissenschaften zu rechnen sind, habe ich aus dem Grunde, daß sie mit der Kriegskunst und Artillerie in keiner

we-

wesentlichen Verbindung stehen, auch keinen Plaz in den gegenwärtigen Anfangsgründen verstatten können.

Der vierte Teil endlich wird von den Gründen der Festungsbaukunst und dem Angriffe und Verteidigung der Festungen handeln. Ich sehe zwar diese Wissenschaften keinesweges als würkliche Teile der Meskunst an, ob sie gleich viele Gründe daraus hernehmen, auch von vielen Schriftstellern dem eingeführten Gebrauche nach mit dazu gerechnet werden; indessen da doch der Endzweck des gegenwärtigen Werkes eigentlich auf die Kriegs- und Geschüzkunst gerichtet ist, wobei eine gründliche Kentnis von Festungen und dem Verhalten bey dem Angriffe und Verteidigung derselben unentbehrlich zum Grunde geleget werden mus, so wird es mir um so weniger verdacht werden, daß ich es für überflüßig gehalten habe, die Abhandlung desselben von den mathematischen Anfangsgründen zu trennen, und etwan unter einem besondern Titel heraus zu geben. Von der besondern Einrichtung dieser Teile werde ich übrigens dasienige, so einer besondern Bemerkung und Erläuterung würdig scheinen möchte, dereinst an seinem gehörigen Orte anzuführen nicht ermangeln.

Da nun vermöge den vorhergehenden Erklärungen mein Verhalten, wie ich mir schmeichele, satsam gerechtfertiget wird, so könte ich hiemit füglich beschliessen, wenn es mir nicht sehr nöhtig schiene, bei dieser Gelegenheit zum Nuzen der Anfänger und meiner künftigen Zuhörer, deren Unterricht mein vorzüglichstes Augenmerk sein mus, noch eine Erinnerung von Wichtigkeit anzuhängen. Es betrift solche unmittelbar den Gegenstand selbsten, zu dessen weiterer Ausbreitung und Fortpflanzung die Artillerieschule errichtet worden, nehmlich

lich den Werth der Mathematik und die Unentbehrlichkeit der Erlernung davon, um sich sowohl in den Kriegswissenschaften überhaupt, als auch insbesondere in der Geschützkunst volkommen, und zu würdiger Erfüllung der Pflichten eines Artillerieoffiziers geschickt zu machen. Mein Absicht ist hiebei keinesweges, der Meskunst eine weitläuftige und glänzende Lobrede zu halten, weil ich gar wohl erkenne, teils, daß meine Bemühungen der Wichtigkeit des Unternehmens nicht gewachsen sein würden, teils, daß ich auch nicht hoffen könte, den Anfängern volkommen verständlich zu werden, um eine ungezweifelte Ueberzeugung bei ihnen hervorzubringen, indem der Werth einer Wissenschaft niemals eher volständig eingesehen und nach Verdienst geschätzet werden kan, bis sie nicht in ihrem ganzen Umfange erkant wird, welches von Anfängern und Schülern nicht gefordert werden kan; sondern meine Absicht ist nur, sie für einigen veriährten Vorurteilen zu warnen, deren unselige Gewalt bisher so lange Zeit den Fortgang dieser Wissenschaft gehemmet hat, und zugleich den Eindrücken vorzubauen, so das übele Beispiel anderer auf ihr Gemühte machen könte. Es giebt nehmlich Feinde und Verächter der mathematischen Wissenschaften, so sie für unnöhtig wo nicht gar für gefährlich halten, sie für leere Grübeleien und eine fruchtlose Beschäftigung müssiger Köpfe erklären, und alles mögliche, wo nicht allezeit öffentlich, doch desto nachdrücklicher im verborgenen anwenden, ihre Abneigung davon zu empfinden zu geben. Nun könte man zwar an sich alle diese Vorwürfe gar wohl mit gänzlichem Stillschweigen übergehen, weil sie doch bei keinem Kenner der Wissenschaften iemals den geringsten Eindruck machen werden, wenn nur die Folgen davon bei iungen und unerfahrnen Gemühtern nicht so gefährlich wären, um so mehr, als sie öfters mit

vorteilhaft scheinenden Anlockungen zur Nachfolge und zum Beifal unterstüzet, und von Personen vorgebracht werden, deren Stand und Rang ihren Aussprüchen ein Gewichte giebt. Dieses Vorurteil findet auch aus der Ursache öfters einen desto leichtern Eingang, weil es der Neigung der Jugend zum Müssiggange schmeichelt, ihm einen Vorwand giebt, sich mühsamer und anhaltender Anstrengungen, ohne welchen die Erlernung der Wissenschaften unmöglich ist, zu entschlagen, und sie über ihre künftige Unwissenheit und die besorgliche Folgen davon durch das Beispiel einiger glücklichen Vorgänger beruhiget. Aus diesem Grunde sehe ich mich verpflichtet, nicht nur überhaupt meine Zuhörer für alle ähnliche Verführungen zu warnen, damit sie nicht eine zu späte Reue treffen möge, sondern auch insbesondere die wieder die Nohtwendigkeit der Wissenschaften für einen Artillerieoffizier gemeiniglich gemachte Einwendungen etwas genauer zu zergliedern, und die Schwäche davon aufzudecken. Vorläuffig mus ich ihnen aber noch diese Betrachtung zu Gemühte führen, teils, daß dergleichen Einwendungen nie von würklichen Kennern der Mathematik gemacht werden, welche doch vernünftigerweise nur allein von dem Wehrte oder Unwehrte derselben gründlich zu urteilen vermögen, sondern allezeit nur von Leuten, so darin gänzlich unerfahren sind, und dennoch einen richterlichen Ausspruch darüber zu tuhn sich anmassen wollen; teils auch, daß die wahre und im Herzen verborgene Gesinnung dieser Leute öfters sehr wenig mit der Sprache, so sie führen, übereinstimme. Ihr inneres Gefühl überzeugt sie vollkommen ihres Unrechts, allein ihre Eigenliebe wird gekränkt, wenn sie entweder den Verdrus und Unmuht über die fruchtlos und ungenüzt entflohene Jahre der Jugend, die keine Reue mehr zurück ruffen kan, einge-

stehen, oder auch ihren Nachfolgern und Untergebenen einen Vorzug einräumen solten, den sie sich nunmehro nicht mehr zu erreichen fähig fühlen. Daher finden sie es freilich am bequemsten und zu ihrer Beruhigung am dienlichsten, die Schuld lieber gar von sich abzulehnen, und auf die Wissenschaften selbst zu werfen, folglich sie gerade zu für unnütze und alle Bemühung zu ihrer Erlernung für überflüssig zu erklären. Dieser Bewegungsgrund ihrer Gesinnungen mus also vor sich schon alles ihr Ansehen verdächtig machen. Allein auch die Einwürfe selbst, so von Zeit zu Zeit wieder die mathematische Wissenschaften vorgebracht werden, sind bei unparteiischer Untersuchung von gar geringem Gewichte, und ich wil die vornehmsten davon anführen, damit man von ihrem Ungrunde überzeuget werde.

Zuerst pflegt man zu sagen: **die Theorie sei unnöhtig und die Praxis allein hinlänglich.** Hierauf kan man nun folgendergestalt antworten.

Obgleich die Wörter **Theorie** und **Praxis** selten von den Gegnern in einem wahren und bestimten Sinne genommen werden, so kan man doch, ohne mich in eine weitläuftige Untersuchung davon einzulassen, aus dem Zusammenhange ihrer Ausdrücke so viel schliessen, daß sie unter der ersten alle systematische Wissenschaftserkentnis überhaupt, unter der andern aber die eigene persöhnliche Erfahrung und Ausübung verstehen. In diesem Verstande tuht man sehr übel, sie einander entgegen zu setzen, da sie doch auf die unzertrenlichste Art mit einander verknüpfet werden müssen. Denn wenn von einer blossen trockenen Spekulation und unfruchtbaren Theorie die Rede wäre, so nicht den geringsten ordentlichen Einflus in die Ausübung haben könte, so würde

dieser Vorwurf volkommen gegründet sein, da der Zweck alles unsers Wissens die würkliche Anwendung sein mus, und auch der Wehrt davon nicht besser, als nach dem Grade des daraus quellenden Nutzens geprüfet werden kan; allein die gegenwärtige von den Gegnern angefochtene Theorie hat selbst unmittelbar die Ausübung zum Zwecke. Damit eben diese leztere algemein, sicher, zuverlässig, und so viel möglich unfehlbar und zu allen Vorfällen hinreichend sein möge, so mus sie auf algemeine und untrügliche Gründe gebauet werden, und daraus entstehet die eigentliche Theorie, welche folglich zur Vollkommenheit der sogenanten Praxis selbst unentbehrlich ist, und ohne welche die leztere nicht den erforderlichen Grad der Zuverlässigkeit erreichen kan. Ich leugne zwar nicht, daß eine langwürige und vieliährige Erfahrung endlich zu einiger bewährter Kentnis und Fertigkeit führen könne, allein wenn sie aller theoretischen Gründe entblösset ist, so ist die Unvolkommenheit und Unzulänglichkeit davon offenbar. Wie viele eigene einzelne Erfahrungen kan denn ein Offizier in der kurzen Zeit seines Dienstes, ia seines Lebens samlen? wie eingeschränkt mus nicht seine Erkentnis sein, wenn ihm alles, was er nicht bereits gesehen und versucht hat, unbekant ist, und wie viele Zeit wird verfliessen, bis er durch diesen Weg allein nur einigermassen brauchbar werden kan? Selbst eben die verschiedene Beobachtungen, so einem Theoretiker zu tausend nützlichen Beobachtungen und Belehrungen für andere Fälle Anlas geben würden, bleiben bei ihm fruchtlos, da er die Folgen davon und ihren Zusammenhang mit andern Warheiten nicht einsieht. Zudem setze man ihn in andere Umstände, als er bereits erfahren, wie viele Fehltritte wird er begehen, ehe er sich heraus finden, und den wahren Weg treffen wird? Und auf wessen Kosten werden alle diese vergebli-

che Versuche geschehen müssen? Wehe dem Staate, dessen Glieder, auf welche er sein Vertrauen zu setzen genöthiget ist, nicht anders als durch eine betrübte Erfahrung weise werden wollen, so wie dem Kranken, der sein Leben den Händen eines Unwissenden übergiebt, der nur durch Anfüllung der Gräber die Kräfte der Arzneimittel kenen lernen wil!

Der zweite Einwurf, so öfters mit vieler Scheinbarkeit vorgebracht wird, bestehet darin: daß die Theorie der Erfahrung wiederspreche, und in der würklichen Ausübung der Erfolg ganz anders auszufallen pflege, als man vorher durch die Rechnung gefunden und angegeben. Hierauf kan man aber überhaupt folgendergestalt antworten. Warheiten können sich einander niemals wiedersprechen, und wenn demnach zwischen der Theorie und Erfahrung sich ein Misverständnis zu zeigen scheinet, so kan man ganz sicher schliessen, daß entweder eine falsche Theorie vor die wahre angegeben worden, oder daß die vorgegebene Erfahrung falsch sei, oder endlich auch, daß kein würklicher sondern nur ein Scheinwiederspruch sich zwischen beiden befinde. Einer von diesen dreien Fällen mus wenigstens allemal vorhanden sein, und alle von diesem eingebildetem Wiederspruche angeführte Beispiele lassen sich bey genauerer Zerlegung gar leicht in dieienige Klasse verteilen, zu welcher sie gehören. Sehr oft werden blosse Hypothesen, wahrscheinliche Mutmassungen und angenommene Systemen, deren Unfehlbarkeit noch gar nicht ausgemacht ist, mit der eigentlichen Theorie verwechselt, und dann ist es gar wohl möglich, daß die Erfahrung das Gegenteil lehren könne. Die Schuld liegt aber alsdann gar nicht an der Theorie selbst, sondern an der Uebereilung des Theoretikers, der zu frühzeitig und ohne gründliche Un-

tersuchung ein wilkührliches und mangelhaftes obgleich scheinbares Lehrgebäude für die Warheit angesehen, und sich durch irgend ein Blendwerk zum Irtume verleiten lassen. Sehr oft ist aber auch die der Theorie entgegen gesetzte Erfahrung selbsten irrig. Es gehören überhaupt sehr geübte Sinne, feine Empfindungskräfte, und ein von Vorurteilen weit mehr gereinigter und nüchterner Verstand dazu, um richtige und zuverläßige Erfahrungen zu machen, als man gemeiniglich glaubt, und manches Auge siehet Gespenster, dem man es nicht zugetrauet hätte. In diesem Falle ist nichts bessers anzurahten, als daß man die eingebildete Erfahrung mehrmalen mit aller möglichen Aufmerksamkeit und mistrauischer Unparteilichkeit prüfe, ehe man sogleich auf einen würklichen Wiederspruch zu schliessen sich einfallen lasse. Endlich ist auch der Wiederspruch in unzähligen Fällen blos scheinbar und verschwindet, so bald die Gegenstände genau zerleget, bestimmet und in ihr gehöriges Licht gesetzet werden. Dieses geschiehet gemeiniglich alsdann, wenn algemeine Säze der Theorie auf einzelne Fälle in der Natur angewendet werden. In den ersten legt die Theorie einige bestimte Bedingungen und Voraussetzungen zum Grunde, woraus sie ihre Folgerungen ziehet, und worauf sie ihre Rechnungen bauet. Aendern sich nun diese Bedingungen, so müssen auch die Folgen davon verschieden sein. Da nun die Natur diese Bedingungen auf unzählige Arten wechselt, verschiedentlich mit einander verbindet, mit unendlich vielen andern verknüpfet, und überhaupt niemals auf so einfache Art zur Würklichkeit bringt, als in den Lehrsäzen angenommen worden, so mus auch die Folge davon, das ist die Erfahrung verhältnismässig von dem Schlusse des Lehrsazes abweichen, und es fehlet so weit, daß aus dieser Abweichung irgend ein Wiederspruch zwischen der

Theorie und der Erfahrung zu schliessen wäre, daß vielmehr offenbar das Gegenteil daraus erhellet, weil die Theorie die Nohtwendigkeit eben dieser Abweichung in der würklichen Ausübung lehret, und aus ihren Gründen begreiflich machet. Vergleicht man nun hiemit die meisten Beispiele, durch welche dieser Einwurf bestärkt zu werden pflegt, so wird man bald finden, daß sie unter diesem letzten Falle begriffen sind, und dadurch ihre Auflösung erhalten.

Der dritte Einwurf endlich ist: daß die Meskunst sehr schwer zu erlernen sei. Nun komt es gegenwärtig zwar nicht auf die Frage an: Ob sie schwer? sondern vielmehr nur, ob sie nohtwendig sei? iedoch mus man sich auch diese Schwürigkeit nicht so gros und abschreckend vorstellen, und dadurch allen Muht zu verlieren. Durch einen mäßigen Verstand, eine natürliche gesunde Denkungsart, eine unermüdete Geduld, einen systematischen Anführer, und dann vorzüglich durch einen ernstlichen und unverstelten Vorsaß, sich durch die ersten Hindernisse nicht abschrecken zu lassen, werden nach und nach viele Schwürigkeiten überwunden, die man nach dem ersten Anblicke vor unersteiglich angesehen hatte. Je weiter ein Anfänger auf diesem Wege fortschreiten wird, ie mehr wird er ihm gebahnt und geebnet scheinen, und die anfängliche Unannehmlichkeiten desselben werden ihm selbst durch die mit der Vermehrung und Aufklärung der Einsichten unzertrenlich verknüpfte Beruhigung reichlich belohnet werden. Da indessen doch die Gaben der Natur ungleich ausgeteilet sind, so könten sich wohl auch einige Personen finden, denen so gar dieienige mittelmäßige Fähigkeiten versaget worden, die zu Erwerbung eines hinlänglichen und brauchbaren Grades gründlicher Einsichten unentbehrlich

sind.

sind. Diesen kan nun freilich zu ihrer Beruhigung kein anderer Trost gegeben werden, als daß, so wie nicht aus jedem Holze ein Merkur werden kan, die Natur sie auch vermuthlich zu keinen grossen Absichten bestimmet habe.

So nohtwendig und unentbehrlich nun auch die Erlernung der mathematischen Wissenschaften für einen Anfänger ist, der sich dem Artilleriedienste widmet, und sich darin über das mittelmäßige zu erheben wünschet, so nöhtig ist doch auch gegenseitig die unverstelte Warnung, daß diese Achtung, so ich für die Theorie einzuflössen getrachtet, nicht über ihre gebührende Gränzen ausgedehnet werde, und man nicht, indem man dem einen Abwege auszuweichen suchet, auf den andern entgegen gesezten gerahte. In allen Wissenschaften giebt es Misbräuche und Pedantereien, und die Meskunst ist keinesweges davon ausgenommen. Es giebt übertriebene Liebhaber davon, die nicht nur ihren Wehrt viel zu weit hinaussetzen, und alle übrige menschliche Kentnisse dagegen verachten, sondern auch insbesondere, stolz auf ihre Grösse, es für unanständig halten, ihre Einsichten zur würklichen Ausübung anzuwenden, und sich bis auf die Bedürfnisse des menschlichen Lebens und der Geselschaft, wovon sie Mitglieder sind, herabzulassen. Diese pralerhafte Tohrheit, so abgeschmackt sie auch ist, war doch, nach Plutarchs Zeugnis im Leben des Marcellus, auch den Alten nicht unbekant, und so gar dem Archimedes ward es übel genommen, daß er seine erhabene Einsichten zum Nutzen des menschlichen Lebens und zulezt zu Verteidigung seiner Vaterstadt herabgewürdiget habe. Allein eine Tohrheit bleibt allezeit eine Tohrheit und wird durch das blosse Altertum nicht verehrungswürdig. Alle un-

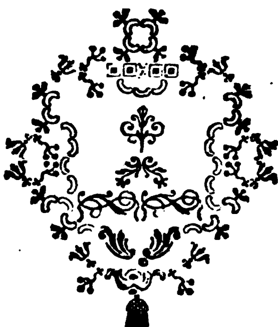
sere

sere Wissenschaft mus die Ausübung zum Zwecke haben, und der eigentliche Wehrt davon kan nur nach dem Grade des dem menschlichen Geschlechte daraus zuflieſſenden Vorteils geschätzet werden. Die tiefsinnigste theoretische Spekulation wird verächtlich, wenn ihr ganzer Vorzug in der blossen trockenen und unfruchtbaren Tiefsinnigkeit besteht, woraus sich kein wahrscheinlicher Einflus in die Ausübung hoffen läst. So lange ein Gelehrter sich nicht in die Einöde verkricht, sondern ein Mitglied des Staats verbleibet, und besonders Vorteile und Achtung für seine Arbeiten davon erwartet, so wird er sich auch gefallen lassen müssen, sich die Beförderung des algemeinen Bestens zum Zwecke davon zu setzen, und den Wehrt davon nur nach diesem Maasstabe auszumessen. Alle übrige tiefsinnige Untersuchungen, und Abhandlungen, die blos ihren Verfassern und etwan einigen eben so müßigen Lesern zum Spielwerke und Zeitvertreib zu dienen scheinen, und wovon man in den berühmtesten Schriften dieser Art Beispiele bis zum Ekel findet, sind dem menschlichen Geschlechte sehr gleichgültig. Es ist wahr, diese algebraische Tändeleien sind öfters sehr tiefsinnig, sehr schwer, erfordern eine ungemeine Fertigkeit in der höhern Mathematik, und wer sie einsehen wil, mus volkommen in ihren Geheimnissen eingeweihet sein. Allein die blosse Schwürigkeit allein verändert ihren innern Wehrt keinesweges. Manche Künste des Seiltänzers und Taschenspielers sind vielleicht eben so schwer, erfordern eben so viele Uebung, und sind demohnerachtet nichts als Gaukeleien, die vielleicht vor jenen noch darin einen Vorzug haben, daß sie wenigstens einem grössern Teile der Mitbürger zur Belustigung und zu Zerstreuung schwermühtiger Gedanken dienen. Sind daher überhaupt betrachtet alle unbrauchbare theoretische Nachforschungen einem ieden Gelehrten un-

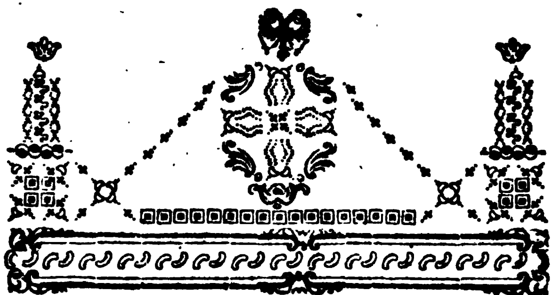
anständig, wie viel mehr müssen sie es einem Kriegsmanne sein, dessen Leben vermöge den Pflichten seines Standes unmittelbar der Ausübung gewidmet ist? Und insbesondere mus sich ein Artillerieoffizier wohl überzeuget halten, daß es für ihn unendlich nohtwendiger sei, eine Batterie gehörig ausstecken zu können, als die Wiederkunft eines Kometen zu berechnen.

Noch ein Abweg, so hiebei vermieden werden mus, bestehet in dem Vorurteil, daß die Ausübung keinen besondern Fleis und Aufmerksamkeit erfordere, und sich ohne Mühe von selbst darbiete, wenn man nur der Theorie mächtig ist; ein Irtum, von dessen Ungrund man öfters nur gar zu sehr zu seiner Beschämung durch die Erfahrung überzeuget wird. Eine iede Anwendung und Ausübung der vorgeschriebenen Regeln, so leicht und geringe sie auch dem Ansehen nach scheinen mag, erfordert dennoch eine Fertigkeit, so nur durch eine fleißige und wiederholte Uebung erworben werden kan, und ohne welchen man in allen Vorfällen fremde und verlegen sein wird. Der gröste Gelehrte, dem diese Uebung fehlet, und der sich blos mit Untersuchung der Regeln in seiner Studierstube begnüget, wird zu seinem grossen Befremden stocken, verlegen sein, sich verwirren und endlich unübersteigliche Hindernisse vor sich finden, so bald er unvermuhtet und ohne viele Vorbereitung die Hand an die würkliche Ausübung legen sol; und er wird finden, daß ihm eine Menge kleiner Handgriffe und Vorteile, die zwar an sich alle leicht und sehr begreiflich sind, aber doch zur Zuverläßigkeit der Arbeit unumgänglich erfordert werden, und ohne eigene Handanlegung nicht geläuffig werden können, bisher fremde und unbekant geblieben sind. Ist nun diese durch die Uebung erworbene Fertigkeit schon an sich bei aller Aus-

übung nohtwendig, so ist sie insbesondere in feindlichen Gelegenheiten noch vielmehr unentbehrlich, wo ohnedem so viele äußere Umstände zu Zerstreuungen Anlas geben, und die Zeit zur Ausführung so kostbar ist. Es darf sich also auch kein Artillerieoffizier iemals schmeicheln, in seinem Dienste volkommen fest zu werden, wenn er nicht mit der Theorie die Ausübung unzertrenlich verknüpfet, und die erstere blos als ein Mittel zu der lezteren, dem eigentlichen wesentlichen Gegenstande seiner Obliegenheiten, ansiehet; in welcher Rücksicht ich dann einem ieden zum voraus zu versprechen mich kühnlich getraue, daß er zu keiner Zeit Ursache finden werde, es sich im geringsten gereuen zu lassen, meinen wohlmeinenden Raht vor Augen gehabt zu haben.



Ein=



Einleitung in die Meskunst.

§. 1.

Die Grösse (quantitas) ist dieienige Eigenschaft eines Dinges, so nicht anders als durch Hülfe eines andern, womit es in Vergleichung gesetzet wird, deutlich erkant werden kan. Alle übrige Eigenschaften desselben aber, so vor sich und ohne Vergleichung mit einem andern deutlich erkant werden können, sind Qualitäten.

Der Begrif der Grösse wird hier in einem so algemeinem Verstande genommen, daß kein Ding möglich ist, dem nicht eine Grösse zugeschrieben werden müsse. Bei Vergleichung mehrerer Dinge aber entstehet die **verhältnismässige Grösse** (magnitudo comparativa); und ohne diese Vergleichung kan ein Ding vor sich weder gros noch klein genant werden.

 §. 2.

§. 2. Etwas **ausmessen** heist eine unbekante oder undeutlich erkante Grösse nach einer andern bekanten **bestimmen**, d. i. einen deutlichen Begrif davon verschaffen; welches geschieht, wenn untersuchet wird, wie oft die bekante Grösse in der unbekanten enthalten ist, oder auch umgekehrt. Diese bekante Grösse, durch welche die andere ausgemessen wird, ist das **Maas** (der Maasstab, mensura); beide aber müssen Dinge von einer Art sein.

§. 3. Die Wissenschaft, die Grössen auszumessen, ist die **Meskunst** (**Grössenlehre**, mathesis, mathematica). Da nun eine iede Wissenschaft eine aus richtigen und gewissen Gründen durch wahre Schlüsse hergeleitete oder **demonstrirte** Erkentnis ist, so folget, daß in der Meskunst alles demonstriret werden müsse.

Aus dieser Erklärung fliest nicht nur der weite Umfang der Meskunst, da alles was einer Grösse fähig ist, auch ein Gegenstand davon werden kan, sondern auch die Gattung der Erkentnis, so in derselben erhalten wird, welche keine Ungewisheit, Zweifel oder wilkührlich angenommene Meinungen verstattet. Daher auch diese Wissenschaft vor den übrigen den Vorzug hat, daß die eigentliche mathematische Lehren nie einem Widerspruche ausgesetzet gewesen.

§. 4. Wenn in A eben die Grösse anzutreffen, so in B ist, so sind A und B einander

gleich. Die **Gleichheit** ist also die Uebereinstimmung der Grösse, und die **Ungleichheit** ist die Verschiedenheit derselben. Wenn aber in A eben die Qualitäten sind, so in B angetroffen werden, d. i. eben die Merkmale und Kenzeichen ausgenommen etwann die Grösse §. 1. oder, wenn A und B nicht anders als durch die Grösse von einander unterschieden werden können, so sind sie einander **ähnlich**; ist aber das Gegenteil, so sind sie **unähnlich**. Die **Aehnlichkeit** ist also die Uebereinstimmung aller Merkmale, so keine Grössen sind, und die **Unähnlichkeit** ist die Verschiedenheit derselben.

Das Zeichen, dessen man sich die Gleichheit anzudeuten, bedienet, bestehet in zwo gleichen parallel lauffenden geraden Linien, welche zwischen den Grössen gesetzet werden (=). A = B heist also: A ist gleich B. Das Zeichen der Ungleichheit ist ein Winkel, dessen Oefnung gegen das grössere, und die Spitze gegen das kleinere gekehret ist (>). A > B heist also: A ist grösser als B.

Das Zeichen der Aehnlichkeit bestehet aus zween halben verkehrt zusammengesetzten Zirkeln (∽). A ∽ B heist demnach: A und B sind einander ähnlich.

§. 5. Aus diesen Erklärungen fliessen folgende Grundsätze, deren Gebrauch sehr häuffig ist.

1. Eine iede Grösse ist sich selber gleich; oder auch: ein iedes Ding ist sich selbsten gleich und ähnlich.

2. Gleiches kan vor Gleiches gesetzet werden, der Grösse ungeschadet, (aequalia possunt pro se invicem substitui salva quantitate) und: ähnliche Dinge können vor einander gesetzet werden, der Aehnlichkeit und den Qualitäten ungeschadet.

3. Wenn $A = C$ und $B = C$, so ist auch $A = B$, oder: wenn zwo Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich. Ferner: wenn $A \backsim C$ und $B \backsim C$, so ist auch $A \backsim B$, oder: wenn zwei Dinge einem dritten ähnlich sind, so sind sie auch unter sich ähnlich.

§. 6. Wenn A völlig einerlei mit B, C, D, u. s. w. zusammengenommen, so ist A das **Ganze**, und B, C, D, u. s. f. sind die **Teile**. Das Ganze ist demnach allen seinen Teilen zusammengenommen gleich, und folglich auch grösser als eines seiner Teile, oder: ein ieder Teil ist kleiner als das Ganze.

§. 7. Eine Menge von Dingen einer Art, deren iedes vor sich betrachtet ein Ganzes ist, oder als ein solches angesehen wird, ist eine **Zahl** (numerus, quantitas discreta). **Iedes** von diesen Ganzen ist eine **Einheit**. Die Menge von Dingen, so zusammenhängende Teile von einem andern Ganzen sind, und als solche betrachtet werden, ist eine stetige **Grösse** (quan-

(quantitas continua). Sind diese Teile neben einander zugleich vorhanden, so ist es eine **ausgedehnte Grösse** (die Ausdehnung, der Raum).

§. 8. Die Meskunst betrachtet entweder die Grösse an sich, ohne Absicht auf die würklichen Dinge in der Natur, und heist die **reine unangebrachte Meskunst** (mathesis pura) oder sie betrachtet die Grössen, so in der Natur würklich vorhanden sind, und heist daher die **angebrachte, oder gemischte Meskunst** (mathesis impura, adplicata, mixta).

Die erstere leitet ihre Lehren aus den blossen Begriffen der Grössen allein und aus den Erklärungen her, die andere aber, welche bereits die würklichen Dinge der Natur mit zu einem Gegenstande ihrer Betrachtungen setzet, nimt schon Erfahrungen und Beobachtungen zu Hülfe, woraus sie ihre Schlüsse herleitet, und stehet daher auch mit der Naturlehre in einem genauen Zusammenhang.

§. 9. Die reine Meskunst bestehet 1. aus der **Rechenkunst** (Arithmetica) der Wissenschaft der Zahlen, oder die Zahlen auszumessen, und zwar entweder mit Ziffern, die **gemeine Rechenkunst** (Arithmetica vulgaris); oder mit Buchstaben als algemeinen Zeichen der Grössen, die **Buchstaben-Rechenkunst** (Algebra); und 2. aus der **Geometrie**, der Wissenschaft den Raum und die Ausdehnung auszumessen.

§. 10. Die gemischte Meskunst, so vermöge ihrer Erklärung §. 8. in einem sehr genauen Zusammenhange mit der Naturlehre stehet, enthält bishero vorzüglich folgende Teile.

1. Die Mechanik, so die Bewegung und Kräfte der Körper, sowohl überhaupt, als insbesondere der festen Körper betrachtet.

2. Die Hydraulik, welche die Bewegung der flüssigen Körper lehret.

3. Die Statik, betrachtet das Gleichgewicht der festen und

4. Die Hydrostatik, das Gleichgewicht der flüssigen Körper.

5. Die Aerometrie, so die Bewegung und Elasticität der Luft bestimmen lehret.

6. Die Optische Wissenschaften, so die Bewegung der Lichtstralen zum Gegenstande haben, sind dreifach, nehmlich: die Optik, so von geraden Stralen, die Dioptrik, welche von gebrochenen Stralen vermittelst durchsichtiger Materien, und die Catoptrik, so von zurückprallenden oder von Spiegeln zurückgesanten Stralen handelt; wozu noch die Perspektiv komt, welche die Abbildung der Gegenstände durch die Lichtstralen auf vorgestellten Flächen lehret.

7. Die Sternkunde (Astronomia) die Lehre von der Bewegung und dem Laufe der Himmelskörper.

8. Die mathematische **Erdbeschreibung** (Geographia) welche die Grösse und Abteilung des Erdbodens in Verhältnis mit den übrigen Himmelskörpern lehret.

9. Die **Gnomonik**, lehret die Abteilung des Tages nach dem Sonnenschatten.

10. Die **Zeitrechnung** (Chronologia) handelt von Ausmessung der Zeiten durch Jahre, Perioden, u. s. w. nach dem Lauffe der Himmelskörper.

Da noch mehrere Gattungen von Grössen in der Natur vorhanden, die einer Ausmessung fähig sind, so können an sich die zur angebrachten Meskunst gehörige Teile und Wissenschaften noch iederzeit vermehret und erweitert werden, und hänget folglich die eigentliche Zahl davon blos von der eifrigern Bearbeitung der physikalischen sowohl, als mathematischen Wahrheiten und Entdeckungen ab.

Ausser diesem giebt es auch noch verschiedene Wissenschaften, die zwar nicht als eigentliche Teile der Meskunst angesehen werden können, weil sie keine Ausmessung der Grössen zu ihrem eigentlichen und unmittelbaren Gegenstande haben, die aber dennoch die vornehmsten Gründe, worauf sie gebauet sind, aus der Meskunst hernehmen, und daher mit ihr in einer sehr genauen Verbindung stehen. Hieher gehören unter andern die bürgerliche sowohl als **Kriegsbaukunst** (Architectura civilis & militaris) zugleich mit der Lehre von dem Angriffe und von der Verteidigung der

Festungen, wie auch die **Geschützkunst** oder eigentliche Artillerie. Diese drei Wissenschaften werden aus der vorherangeführten Ursache von den meisten Lehrern der Mathematik mit den vorbemeldeten Teilen zugleich abgehandelt, obgleich die beide leztern unstreitig würkliche Teile der Kriegskunst sind.

Ferner sind hieher noch zu rechnen: die **Wasserbaukunst** (Architectura hydraulica); der **Straßenbau**; die **Schifbaukunst**, und die **Schiffart** oder **Steuermanskunst**, wovon die erstere den Bau eines Schiffes, und die andere die Regierung und Leitung desselben auf dem Wasser lehret; die **Taktik** oder die **Stellungskunst**, nehmlich, die Wissenschaft Kriegsvölker in Schlachtordnung zu stellen; die **Lagerkunst** (Castrametatio) die Wissenschaft, Kriegsvölker zu lagern; und mehr andere, welche ebenfals auf die Mathematik gebauet sind, ob sie gleich keinen unmittelbaren Teil davon ausmachen.

§. 11. Die zusammenhängende Ordnung in dem Vortrage der Wahrheiten und Sätze heist die **Lehrart** (methodus); und dieienige Lehrart, so bey Abhandlung mathematischer Lehren und Wissenschaften eingeführet ist, und gebraucht werden mus, heist die **mathematische Lehrart** (methodus mathematica). Da nun in der Meskunst alle Wahrheiten und Lehren genau demonstriret und bewiesen werden müssen, §. 3., so bestehet das Wesentliche der mathematischen Methode darin, daß darin alle

Sä-

Sätze aus richtigen und unumstöslichen Gründen durch eine wahre Schlusfolge in der volkommensten Ordnung und deutlichstem Zusammenhange überzeugend hergeleitet werden.

§. 12. Alle Sätze, so in der Meskunst vorkommen, sind entweder Gründe, worauf die Schlüsse gebauet werden, oder es sind Lehren, die aus den erstern geschlossen und hergeleitet werden. Diese Gründe und Vordersätze, sind nun teils die **Erklärungen** (definitio) d. i. deutliche und bestimte Begriffe von denen Gegenständen, wovon gehandelt wird, teils die **Erfahrung** (experientia) d. i. eine durch die Sinne und Empfindung erhaltene klare Erkentnis, sowohl vermittelst eigener mit sorgfältiger Behutsamkeit angestelten **Versuchen** (experimentum) als auch vermittelst aufmerksamer **Beobachtungen** (observatio); oder auch solche **unläugbare Sätze**, deren Wahrheit vor sich klar ist, oder deren Gegenteil einen offenbaren Widerspruch enthalten würde, und die dahero keines Beweises nöhtig haben. Diese leztere sind nun entweder theoretisch oder praktisch; ist das erstere, so sind sie **Grundsätze** (axioma) ist das andere, so sind sie **Heischsätze** (Forderung, postulatum).

§. 13. Diejenige Sätze ferner, deren Wahrheit nicht ohne einen Beweis angenommen werden kan, und die aus den erstern hergeleitet werden müssen, sind wiederum entweder theo-

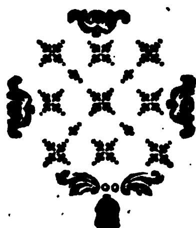
retisch oder praktisch. Die erstern heissen **Lehrsätze** (Theorema), und die andern **Aufgaben** (Problema). Bei dem erstern ist der Satz selbsten (Propositio) so vorgetragen wird, von dem **Beweise** (Demonstratio) desselben zu unterscheiden; bei dem andern komt zuerst der Satz selbsten vor, worin vorgetragen wird, was zu verrichten sei, hierauf folget die **Auflösung**, (Resolutio) so die Art und Weise anzeiget, wie das Vorgebene auszuführen und zu verrichten sei, und endlich der **Beweis** davon.

§. 14. Sätze, so aus den Lehrsätzen und Aufgaben auf eine sehr leichte und begreifliche Art fliessen, ohne eine lange Reihe von Schlüssen nöhtig zu haben heissen **Zusätze** (Corollarium). **Lehnsätze** (Lemma) sind eigentliche Lehrsätze, so aber aus einer andern Kette von Wahrheiten herausgenommen, und in einer Abhandlung zum Beweise der folgenden Sätze hineingerücket werden, in deren Reihe sie nicht eigentlich gehören. **Anmerkungen** (Scholion) sind Sätze, so zur Erleuterung, grösserer Begreiflichkeit und Brauchbarkeit des vorhergehenden hinzugefüget werden, auch was sonsten in Absicht auf die Geschichte der vorgetragenen Lehren bemerkungswürdig scheinet, enthalten; und endlich **willkührliche Sätze** (Hypothesis) sind solche, bei welchen es in Absicht auf die Gründlichkeit der Beweise und

übri-

übrige Wahrheiten selbsten gleichgültig ist, auf was für eine Art sie bestimmet werden, und die daher auch bei keinen Beweisen zum Grunde gelegt werden.

Mehrenteils wird in einem mathematischen Vortrage zu Erhaltung der Aufmerksamkeit und besserer Unterscheidung der Säze einem ieden derselben sein eigentümlicher Nahme vorgesezet. Jedoch da das Wesentliche der mathematischen Lehrart in der Strenge und Unfehlbarkeit der Beweise bestehet, so ist die ausdrückliche Anführung dieser Benennungen nicht unvermeidlich nohtwendig, und es kan eine Abhandlung gar wohl nach der mathematischen Methode geschrieben sein, ob sie gleich nicht mit diesen äussern Verzierungen ausgeschmücket ist.



Er=



Erster Teil.
Anfangsgründe der Rechenkunst und Algebra.

Einleitung in die Rechenkunst.

§. 15.

Rechnen heist: aus einigen gegebenen, d. i. bekanten Grössen und Zahlen eine andere unbekante finden, so zu den gegebenen eine bestimte Verhältnis haben sol. Die Wissenschaft zu rechnen, ist die **Rechenkunst** (Arithmetica). Werden die Grössen oder Zahlen mit Buchstaben bezeichnet, so ist solches die **Buchstaben-Rechenkunst** (Algebra, Calculus literalis); werden sie aber mit Ziffern angedeutet, so entstehet, die gemeine **Rechenkunst**, (Arithmetica vulgaris) §. 9.

§. 16.

§. 16. Bei einer ieden Rechnung sol aus einigen gegebenen Zahlen eine andere gefunden werden §. 15., und die bestimte Art des Verfahrens hiebei machet eine **Rechnungsart** aus (Species arithmetica); ist dieselbe nun aus andern zusammengesetzet, so ist es eine **zusammengesetzte** (Species arithmetica composita); ist sie solches aber nicht, so ist es eine **einfache Rechnungsart**, (Species arithmetica simplex), die folglich vor sich ohne eine andere vorauszusetzen und zu Hülfe zu nehmen, geschehen kan.

§. 17. Wenn aus einer Zahl eine andere gefunden werden sol, so sol sie entweder grösser oder kleiner, d. i. vermehret oder vermindert werden; das erste geschiehet durch die **Addition**, das andere durch die **Subtraktion**; folglich sind überhaupt betrachtet nur diese zwo einfache Rechnungsarten möglich, und alle übrige sind aus ihnen zusammengesetzet.

§. 18. Wenn man eine gegebene Zahl um eine andere gegebene vermehret, oder aus ihnen eine Zahl findet, so ihnen zusammengenommen gleich ist, oder das Ganze davon ausmacht §. 6. so entstehet die **Addition**, und die gesuchte Zahl heist die **Summe**. Wenn aber eine gegebene Zahl um eine andere vermindert, oder aus beiden eine dritte gefunden werden sol, welche anzeiget, um wie viel die eine der gegebenen grösser ist als die andere, so entstehet

die

die **Subtraktion**, und die gefundene Zahl ist der **Unterschied** (Ueberrest, Differentia).

§. 19. Wenn eine Zahl so oft zu sich selbst addiret wird, als eine andere durch ihre Einheiten anzeiget, so wird sie dadurch **multipliciret** (vervielfältiget). Die erstere dieser Zahlen heisset der **Multiplicandus**, die andere aber der **Multiplikator**, beide zusammen aber die **Faktoren**, und die dadurch gefundene Zahl das **Produkt** (Factum). Dieses Produkt hält demnach den einen Faktor so oft in sich, als der andere die Einheit. Folglich wird in der **Multiplikation** aus zwo gegebenen Zahlen eine dritte gefunden, welche die eine der gegebenen so oft in sich begreift, als die andere die Einheit enthält; und ist nichts als eine wiederholte Addition.

§. 20. Wenn eine Zahl von einer andern so oft subtrahiret und abgezogen wird, als möglich, so wird die leztere durch die erstere **dividiret**. Die erstere dieser Zahlen heist der **Divisor**, die andere der **Dividendus**, und die dritte, welche durch ihre Einheiten anzeiget, wie oft die Subtraktion möglich gewesen, der **Quotient**. Der Dividendus enthält demnach den Divisor so oft, als der Quotient die Einheit; folglich wird in der **Division** aus zwo gegebenen Zahlen eine dritte gefunden, welche die Einheit so oft in sich begreift, als die eine der gegebenen in der andern enthalten

ist;

ist; und ist nichts als eine wiederholte Subtraktion.

§. 21. Obgleich die Addition und die Subtraktion auch bereits die Multiplikation und die Division in sich begreiffen, §. 19. und 20. so werden doch die beide leztern, da das Verfahren bei ihnen besonders eingerichtet wird, als zwo verschiedene Rechnungsarten angesehen; und daher entstehen die vier einfache **Rechnungsarten**, nehmlich die **Addition**, **Subtraktion**, **Multiplikation**, und **Division**.

§. 22. Eine Zahl ist eine Menge von Einheiten, §. 7. Ist nun die Art und Gattung dieser Einheiten bestimt, so ist es eine **benante Zahl**; ist dieses aber nicht, so ist es eine **unbenante Zahl**. Wenn mehrere benante Zahlen aus einerlei Einheiten bestehen, so sind sie **von einerlei Benennung**; ist dieses aber nicht, so sind sie **von verschiedener Benennung**. Sind bei den leztern die Einheiten der einen Zahl nur Teile von den Einheiten der andern, so können beide auf einerlei Benennung gebracht, und auf eine Art ausgedrückt werden, welches sonsten nicht möglich ist. Ueberhaupt können benante Zahlen nicht mit einander verglichen, noch kan irgend eine Rechnung damit angestellet werden, wenn sie nicht in irgend einer Absicht Dinge von einer Art sind, oder irgend eine Einheit mit einander gemein haben.

Die

Die Zahlen drei und achte sind unbenante, aber drei Pfund und acht Kugeln sind benante Zahlen. Sieben Gulden, und vier Gulden sind von einerlei, aber sieben Gulden und vier Klafter, sind von verschiedener Benennung. Die Zahlen zween Gulden und vier Groschen, sind zwar von verschiedener Benennung, können aber zu einer gebracht werden, weil die Einheit der einen Zahl nehmlich der Groschen ein Teil von der Einheit der andern nehmlich des Guldens ist, das ist, wenn man sagt: vierzig Groschen und vier Groschen. Nur mit dergleichen benannten Zahlen können die §. 21. angeführte Rechnungsarten vorgenommen werden; haben sie aber nichts mit einander gemein, wie z. B. 3. Pfund, 8. Klafter und 6. Kugeln, so lassen sie sich weder addiren, subtrahiren, multipliciren noch dividiren.

§. 23. Die Rechenkunst handelt

I. Von den ersten Gründen der Zahlenrechnung. Erster Abschnit, und zwar

A. Von Bezeichnung und dem Ausdrucke der Zahlen, das Zählen. Erstes Hauptstück.

B. Von den vier einfachen Rechnungsarten in Zahlen, nehmlich

1. Von der Addition. Zweites Hauptstück.

2. Von der Subtraktion. Drittes Hauptstück.

3. Von der Multiplikation. Viertes Hauptstück.

4. Von der Division. Fünftes Hauptstück.

II. Von den ersten Gründen der Buchstaben-Rechnung. Zweiter Abschnit, und zwar

A. Von Bezeichnung der Grössen überhaupt. Erstes Hauptstück.

B. Von den vier einfachen Rechnungsarten mit Buchstaben, nehmlich

1. Von der Addition. Zweites Hauptstück.

2. Von der Subtraktion. Drittes Hauptstück.

3. Von der Multiplikation. Viertes Hauptstück.

4. Von der Division. Fünftes Hauptstück.

III. Von den Brüchen sowohl in Zahlen als Buchstaben. Dritter Abschnit.

A. Ueberhaupt. Erstes Hauptstück.

B. Insbesondere, und zwar

1. Von den vier Rechnungsarten mit denselben. Zweites Hauptstück.

2. Von den zehnteiligen Brüchen. Drittes Hauptstück.

IV. Von den Potenzen. Vierter Abschnit.

A. Ueberhaupt. Erstes Hauptstück.

B. Insbesondere, und zwar

1. Von Ausziehung der Wurzeln. Zweites Hauptstück.

2. Von Irrational-Grössen. Drittes Hauptstück.

V. Von der Analysis. Fünfter Abschnit.
A. Ueberhaupt. Erstes Hauptstück.
B. Insbesondere, und zwar
1. Von Auflösung der Gleichungen mit einer unbekanten Grösse. Zweites Hauptstück.
2. Von Auflösung der Gleichungen mit mehrern unbekanten Grössen. Drittes Hauptstück.
3. Von unbestimten Aufgaben. Viertes Hauptstück.
4. Von quadratischen Gleichungen. Fünftes Hauptstück.

VI. Von den Verhältnissen und Proportionen. Sechster Abschnit.
A. Ueberhaupt. Erstes Hauptstück.
B. Insbesondere, und zwar
1. Von der geometrischen Proportion. Zweites Hauptstück.
2. Von zusammen gesezten Verhältnissen. Drittes Hauptstück.
3. Von der Regel de Tri und Geselschaftsrechnung. Viertes Hauptstück.
4. Von der arithmetischen Proportion. Fünftes Hauptstück.
5. Von geometrischen Progressionen. Sechstes Hauptstück.
6. Von arithmetischen Progressionen. Siebentes Hauptstück.
7. Von den Logarithmen. Achtes Hauptstück.

Er-

Erster Abschnit.

Von den ersten Gründen der Zahlen-Rechnung.

Erstes Hauptstück.

Von dem Zählen.

Erklärung.

§. 24.

Zählen (numerare) heist, die Grösse einer Zahl oder die Menge der darin enthaltenen Einheiten deutlich bestimmen und ausdrücken. Bei dem Zählen darf demnach keine neue Zahl aus andern gegebenen gefunden werden, folglich wird auch dabei im eigentlichen Verstande nicht gerechnet, §. 15. folglich ist auch die Numeration keine Rechnungsart.

Wilkührlicher Satz.

§. 25. Damit bei dem Zählen die Menge der Einheiten, worin die Grösse der Zahl be-

stehet, desto deutlicher könne vorgestellet und bestimmet werden, so wird allezeit eine bestimte Anzahl von Einheiten zusammengenommen als ein Ganzes betrachtet, und wiederum als eine neue Einheit angesehen. Daher kommen bei den Zahlen zweierlei Einheiten vor, nehmlich **einfache**, so nicht aus andern zusammengesetzet sind, und **zusammengesezte**, welche aus andern Einheiten bestehen, und daher von gar vielerlei Gattung sind. Jede zusammengesezte Einheit aber begreift **zehen** nächst vorhergehende als Teile in sich, welches bis auf **zehen** zählen, oder das **zehnteilige Maas** der Zahlen genennet wird.

Daß bei den Zahlen das zehnteilige Maas angenommen worden, ist an sich eine blos wilkührliche Sache, und es hätte dabei eben sowohl als bei andern Grössen eine andere Einteilung erwählet werden können. Der gröste Vorteil so sich dabei befindet, bestehet darin: 1. daß diese Teilung aller Einheiten in zehen Teile ohne Abänderung und Unterbrechung fortgehet, und 2. daß solche bei dem ganzen menschlichen Geschlechte wie durch eine Art des Vertrages eingeführet ist; welches von andern Maassen der Grössen nicht gesaget werden kan, und daher auch diese Art, bis auf zehen zu zählen, eine gewisse Nothwendigkeit zu haben scheint, so doch darin nicht angetroffen wird.

Wil-

Wilkührlicher Satz.

§. 26. Die einfachen Einheiten heissen, **eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun.** Komt zu diesen Einheiten noch eine hinzu, so entstehet eine zusammengesezte Einheit, §. 25. so **zehen** heisset. Zwo derselben sind **zwanzig**, drei **dreissig**.... und neune **neunzig**; komt noch ein Zehener hinzu, so entstehet wiederum eine zusammengesezte Einheit, so **hundert** genennet wird, und zehen dergleichen Hunderte machen eine Einheit, so **tausend** heist; Die Einheiten der Tausende gehen wiederum in der vorigen Ordnung fort, so daß man zehen von Tausenden, hunderte und tausend von Tausenden bekomt, welche leztere Einheit eine **Million** genennet wird. Auf eben diese Art heist eine Million von Millionen eine **Billion**, eine Million von Billionen eine **Trillion**, eine Million von Trillionen eine **Quadrillion**, u. s. f.

Erklärung.

§. 27. Die Zeichen der Zahlen heissen **Ziffern.** Da nun bei allem Zählen nicht mehr als neun Einheiten zugleich dürfen vorgestellet werden §. 26., so sind auch nicht mehr als zehen Ziffern nöhtig, um diese Einheiten auszudrücken und zu bezeichnen, welche aber bald einfache bald zusammengesezte Einheiten andeuten. Diese Ziffern sind nun:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun

Diese Ziffern werden Arabisch genant, weil sie von den Arabern zuerst nach Europa gebracht worden. Vorhero bediente man sich bei den meisten Völkern der Buchstaben zu Bezeichnung der Zahlen, womit aber viele Unvolkommenheiten verknüpft waren, und die Rechnungen insbesondere höchst beschwerlich gemacht wurden.

Wilkührlicher Satz.

§. 28. Der **Wehrt** einer Ziffer ist die Grösse der Zahl so sie bedeutet, und ist zwiefach, nehmlich der **natürliche Wehrt** (valor naturalis) so ihr eigentümlich und unveränderlich ist, vermöge welchem eine Ziffer allezeit die ihr nach §. 27. zugehörige Menge von Einheiten andeutet, und der **künstliche Wehrt** (valor artificialis) so veränderlich ist, und nach welchem eine Ziffer Einheiten bald von dieser bald von iener Gattung nach §. 26. bezeichnet. Dieser künstliche Wehrt wird nun durch die Stelle bestimmet, worin die Ziffer stehet, nehmlich in der ersten Stelle von der Rechten gegen die Linke bedeutet sie einfache Einheiten, in der zwoten Zehener, in der dritten Hunderte, in der vierten Tausende, in der fünften Zehener von Tausenden, u. s. f. Ueberhaupt bedeutet eine Ziffer in der nächstfolgenden Stelle allemal zehenmal so viel, als sie in der nächst vorher-

hergehenden bedeutet hat. Folglich ist dieser künstliche Wehrt der Ziffer so viel als ihr Rang (valor localis), und gehet in folgender Ordnung fort.

Trillionen			Tausende von Billionen			Billionen			Tausende von Millionen			Millionen			Tausende			einfache		
Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderte	Zehner	Einheiten	Hunderte	Zehner	Einheiten

Zusatz.

§. 29. Weil der künstliche Wehrt der Ziffern durch ihren Rang oder durch die Stelle worin sie stehen, bestimmet wird, §. 28. Die vorhergehende Stellen nicht aber allezeit mit würklichen Ziffern erfüllet sein können, wenn in der Zahl Einheiten von einer gewissen Gattung abgehen, so hat man ein Zeichen nöhtig, welches die gehörige Stelle einnimt und ausfült, damit die Ziffern ihren erforderlichen Rang bekommen. Dieses Zeichen ist (0) und wird Nulle genennet, welches so oft wiederholet wird, als leere Plätze zu erfüllen sind.

Z. B. In der Zahl 705 bedeutet die Nulle den Abgang von Zehenern, und in 6020 bedeutet die erste Nulle zur Rechten den Abgang von Einheiten, und in der dritten Stelle den Abgang von Hunderten. Eben so würde 100000 nicht hundert

dert tausend bedeuten können, wenn nicht fünf Nullen vorhergingen, damit die Ziffer 1 in der sechsten Stelle zu stehen komme, und ihren gebührenden Rang erhalte.

Aufgabe.

§. 30. Eine mit Ziffern geschriebene Zahl recht auszusprechen.

Auflösung. 1. Teilet die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen ein, und gebet ieder Classe drei Ziffern; in der lezten können aber auch weniger sein.

2. Bemerket die erste Zahl der dritten Classe oben durch einen Strich oder Punkt, der fünften durch zwei, der siebenten durch drei, u. s. f.

3. Sprechet einen Strich durch Millionen aus, zwei durch Billionen, drei durch Trillionen, u. s. w.

4. Alle Ziffern der Classen, worin kein Strich befindlich ist, ausser in der ersten, sprechet durch Tausende aus. Die erste Ziffer ieder Classe insbesondere sprechet als Einheiten, die zwote als Zehener und die dritte als Hunderte aus; dieienige Stellen aber, wo sich Nullen befinden, werden ausgelassen. Welches alles aus dem Range der Ziffern und aus der §. 28. angeführten Tabelle erhellet.

Es

Es bedeutet demnach die Zahl

79‴ | 234 | 915″ | 786 | 531′ | 234 | 742.

Siebenzig neun Trillionen, zwei hundert dreissig vier tausend, neun hundert fünfzehn Billionen, sieben hundert achzig sechs tausend, fünf hundert dreissig ein Millionen, zwei hundert dreissig vier tausend, sieben hundert vierzig und zwei.

Ferner die Zahl

400 | 030′ | 000 | 002

bedeutet: vier hundert tausend dreissig Millionen, und zwei.

Aufgabe.

§. 31. Eine gegebene Zahl recht zu schreiben.

Auflösung. 1. Nach der Grösse der aufgegebenen Zahl und der grösten darin enthaltenen Einheit bestimmet die dazu erforderliche Classen.

2. Bemerket diejenige Classen, worin Millionen, Billionen, Trillionen u. s. w. zu stehen kommen, mit einem, zwein oder dreien Strichen, wie vorhero §. 30.

3. Setzet die Millionen, Billionen u. s. w. in ihre gehörige Classen, doch so daß die Einheiten davon in die erste, die Zehener in die zwote, und die Hunderte in die dritte Stelle ieder Classe von der Rechten zur Linken zu stehen kommen.

4. Werden Einheiten, Zehener u. s. w. ausgelassen, so erfüllet ihre Stellen mit Nullen §. 29. so bekomt iede Ziffer ihren gebührenden Rang, und die Zahl ist ausgedrücket.

§. 32. Bei benanten Zahlen sind die Arten der Einheiten bestimt §. 22., sollen solche nun gezählet werden, so müssen sie entweder von einerlei Benennung sein, oder doch darauf gebracht werden können; in welchem Falle dann eine gewisse Menge von Einheiten allemal wieder eine zusammengesezte Einheit ausmacht; welches Maas aber doch selten zehenteilig, sondern vielmehr nach der eingeführten Gewohnheit, nach Verschiedenheit der Länder, Zeiten und Umstände gar sehr verschieden ist. Folglich muß bei dem Zählen sowohl als durchgängig bei allen Rechnungen mit den benanten Zahlen, nicht nur auf das zehenteilige Maas der Zahlen überhaupt, sondern auch insbesondere auf das einer ieden Gattung derselben eigentümliche Maas gesehen werden, d. i. es mus bekant sein, aus wie viel kleinern Einheiten allemal die nächst folgende grössere bestehet und zusammengesetzet ist.



Zwei-

Zweites Hauptstück.

Von der Addition.

Aufgabe.

§. 33.

Zahlen zu einander zu addiren.

Auflösung. 1. Setzet die Zahlen, so von einerlei Einheit sind, unter einander, d. i. Einheiten unter Einheiten, Zehener unter Zehener, Hunderte unter Hunderte, u. s. w.

2. Ziehet unter diese gegebene summirende Zahlen einen Querstrich, damit sie von der Summe können unterschieden werden.

3. Addiret zuerst die Einheiten zusammen, und setzet die Summe davon unter den Strich; sind Zehener darunter, so behaltet sie entweder im Gedächtnis, oder setzet sie unter die summirende Zehener, die Einheiten aber unter die Einheiten.

4. Sehet die Zehener wiederum als Einheiten an, und addiret sie zusammen, ihre Summe setzet in die Stelle der Zehener; sind aber wiederum Zehener darunter begriffen, so setzet solche unter die summirende Hunderte.

5. Fahret auf solche Art mit den übrigen fort, so ist die gefundene Zahl die Summe der gegebenen.

Beweis. Die Zahl, so vermöge diesem Verfahren gefunden worden, bestehet aus allen Einheiten, Zehenern, Hunderten u. s. f. der gegebenen Zahlen, und ist also denselben zusammengenommen gleich, folglich das Ganze davon §. 6. und deswegen die gesuchte Summe §. 18.

Z. B.

357	9758	503079
432	8569	2387
789 Summe	18327 Summe	9075
		514541 Summe.

Wenn sehr lange Reihen von Zahlen zu addiren sind, so kan man sie zur Bequemlichkeit durch Linien in etliche kürzere Reihen abteilen, und mit iedem derselben die Addition nach obiger Art besonders vornehmen; hierauf aber die erhaltene einzelne Summen wieder besonders zusammen addiren, wodurch man endlich die gesuchte Hauptsumme erhalten wird.

Aufgabe.

§. 34. Benante Zahlen zu addiren.

Auflösung. 1. Setzet dieienige Zahlen, so von einerlei Benennung sind, unter einander, und bei denselben die Einheiten unter Einhei-

heiten u. s. w. nach §. 33. und ziehet unter dieselben einen Querstrich.

2. Addiret zuerst die Zahlen von der kleinsten Gattung zusammen.

3. Sind in dieser Summe Zahlen von der nachfolgenden grössern Gattung enthalten, nach §. 32. so setzet solche auch unter dieselbe.

4. Fahret auf diese Art mit den übrigen fort, so ist die gefundene Zahl die Summe der gegebenen.

Z. B.

15	fl.	14	gl.	2	kr.	10	℔	8	L.	3	Qt.
9	—	12	—	2	kr.	4	—	26	—	2	—
25	fl.	7	gl.	1	kr.	15	℔	3	L.	1	Qt.

§. 35. Die **Probe** einer Rechnung ist die Untersuchung, ob in derselben die Regeln der Rechnungsart beobachtet worden, oder ob die gefundene Grösse die verlangte Verhältnis zu den gegebenen habe §. 15.

Wenn nun eine Zahl oder Grösse zu einer andern addiret, und hernach wieder davon abgezogen wird, so bleibet die Grösse unverändert; folglich heben die Addition und Subtraktion einander auf.

Wenn demnach eine der addirten Zahlen wieder von der Summe subtrahiret wird, so mus die andere übrig bleiben, welches dahero die **Probe der Addition** ist.

Man

Man kan zugleich bei langen Reihen von Zahlen zu mehrerer Sicherheit das Hülfsmittel gebrauchen, daß man einmal von oben hinunter, das andremal aber von unten hinauf summire, und wenn beiderseits einerlei Summe herauskomt, so kan man sich schon ziemlich auf die Richtigkeit der Rechnung verlassen.

Drittes Hauptstück.

Von der Subtraktion.

Aufgabe.

§. 36.

Eine kleinere Zahl von einer grössern abzuziehen.

Auflösung. 1. Setzet die Zahl, so von der andern abgezogen werden sol, unter dieselbe, wie bei der Addition geschehen ist, §. 33. und ziehet darunter einen Querstrich, um sie von der gesuchten Zahl zu unterscheiden.

2. Ziehet die Einheiten, die Zehener, die Hunderte u. s. f. der untern Zahl von den Einheiten, Zehenern, Hunderten u. s. f. der obern ab, und setzet iedesmal die Ueberreste davon in ihre gehörige Stelle.

3. Ist die abzuziehende untere Zahl der obern gleich, so bleibet nichts übrig, und daher wird in die Stelle derselben eine Nulle geschrieben.

4. Ist aber die untere Ziffer grösser als die überstehende, von welcher sie abgezogen werden sol, so wird von der nächst folgenden Ziffer der leztern zur Linken eine Einheit weggenommen und entlehnet oder geborget, welche nunmehro in dieser Stelle zehen gilt §. 28. so daß dadurch die Subtraktion weiter fortgesezet werden kan. Diejenige Ziffer aber, von welcher Eins geborget worden, bemerket mit einem Punkt, zum Zeichen, daß sie um Eins verringert worden.

5. Ist die Ziffer, von welcher geborget werden sol, eine Nulle, so wird von der nächst folgenden eine Einheit genommen, und in die Stelle der Nulle gebracht, woselbst sie zehen gilt §. 28. Von dieser wird auf die vorige Art eine Einheit geborget, und mit der Subtraktion fortgefahren, wodurch aber in der Stelle der Nulle 9 übrig bleiben. Die Ziffer sowohl, welche um Eins verringert, als auch die Nulle, so in 9 verwandelt worden, werden mit einem Punkt bemerket. Folgen bei dieser Gelegenheit mehrere Nullen auf einander, so wird das Borgen bis zur würklichen Ziffer fortgesetzet, und alle dazwischen liegende Nullen werden in 9 verwandelt. Die auf

die-

diese Art gefundene Zahl ist der gesuchte Unterschied.

Beweis. Da vermöge diesem Verfahren alle Einheiten, Zehener, Hunderte u. s. w. der kleinern Zahl von den Einheiten, Zehenern, Hunderten, u. s. w. der grössern, folglich die kleinere Zahl selbsten von der grössern abgezogen worden, so ist die gefundene Zahl der gesuchte Unterschied und Ueberrest §. 18.

Z. B.

1ste		2tes	3tes	4tes
9687		874	6723	700057060
4325		72	874	3004570
5362	Untersch.	802	5849	697052490

Aufgabe.

§. 37. Benante Zahlen von einander zu subtrahiren.

Auflösung. 1. Setzet die Zahlen unter einander, wie nach §. 34. und ziehet unter dieselben einen Strich.

2. Subtrahiret zuerst die Zahlen von der kleinesten Art von einander, und hierauf nach und nach auch die von der grössern, nach §. 36.

3. Ist aber die untere Zahl grösser als die obere, so mus bei der nächstfolgenden grössern Art eine Einheit geborget werden, welche aber in der kleinern nicht allemal zehen, sondern so viel Einheiten gilt, als das eigentümliche

liche Maas dieser benanten Zahlen erfordert §. 32.

Z. B.

14 Kl.	3 Sch.	9 Zoll		30 ℔	4 L.	2 Qt.
8	5	2		15	18	3
5	4	7 Untersch.		14	17	3 Unt.

Trift es sich, daß in der abzuziehenden Zahl kleinere Arten enthalten sind, so bei der grössern nicht vorhanden, so wird die Rechnung am bequemsten verrichtet, wenn man sogleich von der grössern Art der leztern Eins borget, und solches in so kleine Arten zergliedert, als die abzuziehende Zahl mit sich führet. Z. B. Es sol von 72 Klafter die Zahl 15 Kl. 4 Sch. 9 Zoll und 6 Linien abgezogen werden, so sezet

71 Kl.	5 Sch.	11 Zoll	12 Lin.
15	4	9	6
56	1	2	6 Unterschied.

Zusaz.

§. 38. Die Probe der Subtraktion bestehet nach §. 35. darin, daß der gefundene Ueberrest zu der subtrahirenden Zahl addiret werde, und wenn die Summe davon der grössern Zahl, von welcher die Subtraktion geschehen, gleich ist, so ist recht gerechnet worden.

Viertes Hauptstück.
Von der Multiplikation.

Forderung.

§. 39.

In der Multiplikation sol das Produkt den einen Faktor so oft in sich enthalten, als der andere die Einheit §. 19. Um demnach von allen möglichen Zahlen die Produkte zu finden, so ist nöhtig, daß man vorhero die Produkte der einfachen Einheiten von Eins bis auf Neune wisse, weil alle übrige Teile der Faktoren wieder als Einheiten angesehen werden müssen. Hieraus entstehet dann das sogenante **Ein mal Eins**, oder die **pythagorische Tafel**, so folgende ist.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

In den beiden äussersten Reihen Oben und zur Linken sind die Faktoren von Eins bis Neun, und in den mit beiden übereinstimmenden Quadraten die Produkte davon zu finden.

Aufgabe.

§. 40. Zahlen durch einander zu multipliciren.

Auflösung. Erster Fal. Wenn der Multiplikator nur eine einfache Zahl ist.

1. Setzet die Faktoren unter einander in ihrer gehörigen Stelle, nehmlich Einheiten unter Einheiten, Zehener unter Zehener u. s. w. und ziehet einen Strich darunter, um sie von dem Produkte zu unterscheiden.

2. Nehmet das Produkt des Multiplikators in die Einheiten des Multiplikandus aus der pythagorischen Tafel, und setzet das Produkt davon in die Stelle der Einheiten; sind aber Zehener darin, so merket solche besonders auf.

3. Sehet die Zehener des Multiplikandus von neuen als Einheiten an, und setzet das Produkt derselben in den Multiplikator, zu welchen ihr die etwan vorher übrig gebliebene und aufgemerkte Zehener addiret, in die Stelle der Zehener. Kommen in diesem Produkte von neuen Zehener vor, so werden sie wiederum aufgemerket, und gehören in die Stelle der Hunderte §. 26.

4. Fahret auf diese Art fort mit den Hunderten, Tausenden, und allen übrigen Teilen des Multiplikandus.

Zweiter Fal. Wenn der Multiplikator aus mehreren Ziffern bestehet.

1. Nachdem ihr mit den Einheiten des Multiplikators die vorige Rechnung vorgenommen, so sehet die Zehener desselben von neuen als Einheiten an, multipliciret dadurch auf vorbemeldete Art alle Teile des Multiplikandus, und setzet diese Produkte unter die vorhergehenden, nur so, daß ihr das erste Produkt, so aus Zehenern bestehet, auch sogleich in die Stelle der Zehener setzet.

2. Fahret auf diese Art mit den Hunderten, Tausenden und allen übrigen Teilen des Multiplikators fort, nur daß ihr mit den Produkten derselben iederzeit um eine Stelle weiter hinein zur Linken rücket, damit die Ziffern ihren gehörigen Rang bekommen.

3. Addiret endlich alle diese einzelne Produkte zusammen, so ist die Summe davon das gesamte Produkt.

4. Wenn der Multiplikator etwann in der Mitten Nullen hat, so wird das Produkt davon übergangeu; das Produkt der nächstfolgenden Ziffer aber mus um so viele Stellen weiter zur Linken gerücket werden, als Nullen im Multiplikator auf einander folgen, damit die Ziffern nicht ihren Rang verlieren.

5. Wenn einer von beiden Faktoren, oder auch alle beide zur Rechten Nullen haben, so werden sie währender Rechnung ausgelassen, nachmals aber zu dem Hauptprodukte wieder zugesetzet, damit die Ziffern desselben ihre gebührende Stellen bekommen.

Beweis. Vermöge diesem Verfahren werden die Einheiten, Zehener, Hunderte u. s. w. des Multiplikandus so oft genommen, als die Einheiten, Zehener, Hunderte u. s. f. des Multiplikators anzeigen. Die Summe dieser einzelnen Produkte enthält demnach den Multiplikandus so oft, als der Multiplikator die Einheit; folglich ist sie das gesuchte Produkt §. 19.

Z. B.

```
 3578               32508        21752
    5                 352         2003
-----            ---------    ---------
17890 Prod.         65016        65256
                   162540     43504
                   97524      ---------
                 ---------    43569256
                 11442816

  52000
    200
--------
10400000
```

Es ist willkührlich, was für einen Faktor man als den Multiplikator oder Multiplikandus ansehen wil, indem iederzeit einerlei Produkt erhalten wird. Jedoch nimt man mehrenteils die kleinere Zahl

für den Multiplikator an, um nicht so viele einzelne Produkte zu bekommen.

Aufgabe.

§. 41. Benante Zahlen auf kleinere Arten oder Einheiten zu bringen.

Auflösung. 1. Multipliciret die gegebene Zahl durch ihr eigentümliches Maas, §. 32. d. i. durch dieienige Zahl welche anzeiget, wie viel kleinere Einheiten eine nächstfolgende grössere ausmachen, und fahret hiemit stuffenweise fort, bis auf dieienige Benennung, so ihr verlanget.

2. Sind kleinere Einheiten mit der grössern verbunden, so addiret sie iederzeit zu dem gehörigen Produkte von ihrer Benennung hinzu.

Z. B. Es sind 13 Kl. 4 Sch. 9 Zoll auf Zolle zu bringen so setzet 13 Kl. 4 Sch. 9 Zoll

```
 6
---
 82 Sch.
 12
---
173
82
---
993 Zoll.
```

Aufgabe.

§. 42. Benante Zahlen zu multipliciren.

Auflösung. 1. Multipliciret zuerst die kleineste Einheiten des Multiplikandus mit

dem

dem Multiplikator; sind aber in diesem Produkte Einheiten von der nächst grössern Art enthalten, so merket ihre Anzahl besonders auf.

2. Fahret auf diese Art mit den grössern Einheiten fort, addiret aber zu ihren Produkten diejenige Zahl, so in den vorigen Produkten aufbehalten worden.

Oder 1. Bringet die gegebene benante Zahl auf die kleineste Einheit nach §. 41.

2. Multipliciret solche alsdan durch den gegebenen Multiplikator.

Z. B.

62 fl.	18 gl.	2 kr.	1 ℌ	
			5	
314	13	2	1	Prod.

25 Kl. 4. Sch. mit 12

```
  25
   6
 ---
 154
  12
 ---
 308
154
----
1848 Schuh.
```

Wenn der Multiplikator auch eine benante Zahl ist, und kleinere Einheiten mit sich führet, so kan die Rechnung damit nach den bisherigen Gründen noch nicht geschehen, weswegen auch das sogenante Toisiren, welches Begriffe von Flächen und Körpern voraussetzet, bis in die Geometrie verspare wird.

Zusatz.

§. 43. Da die Multiplikation nichts als eine wiederholte Addition, und die Division eine wiederholte Subtraktion ist §. 19. Die Probe der Addition aber durch die Subtraktion geschieht, §. 35. so mus auch die Probe der Multiplikation durch die ihr entgegen gesezte Rechnungsart, nehmlich durch die Division geschehen.

Fünftes Hauptstück.

Von der Division.

Lehrsatz.

§. 44.

Die Division ist die Zerlegung und Auflösung der Produkts in seine Faktoren.

Beweis. Wenn eine Zahl eine andere so oft in sich enthält, als eine dritte durch ihre Einheiten anzeiget, so ist die erstere das Produkt, und die beide andern sind die Faktoren dazu §. 19. Nun enthält in der Division der Dividendus den Divisor so oft in sich, als der Quotient durch seine Einheiten anzeiget, §. 20. folglich ist der Dividendus das Produkt,

dukt, und der Divisor und der Quotient sind die Faktoren dazu. Daher wird in der Division aus dem gegebenen Produkte und dem einen Faktor der andere Faktor gesuchet; oder die Division ist die Auflösung des Produkts in seine Faktoren.

Zusatz.

§. 45. Hieraus fliesset auch noch 1. wenn man den Divisor mit dem Quotienten multipliciret, so komt der Dividendus zum Produkt. 2. Die Multiplikation und Division sind entgegengesezte Rechnungsarten, und heben einander auf.

Zusatz.

§. 46. Zur Division mit Zahlen sind dahero wieder wie bei der Multiplikation die Produkte der einfachen Einheiten von Eins bis Neune zu wissen nöhtig, so in der pythagorischen Tafel §. 39. enthalten. Wenn demnach die in den Quadraten derselben befindliche Produkte als die Dividenden angesehen werden, so ist in der einen damit übereinstimmenden äussersten Reihe entweder Oben oder zur Linken, der Divisor, in der andern aber der Quotient dazu anzutreffen.

Aufgabe.

§. 47. Zahlen durch einander zu dividiren.

Auflösung. Erster Fal. Wenn der Divisor nur eine einfache Zahl ist.

1. Setzet den Divisor zur Linken des Dividendus; sondert ihn aber durch einen senkrechten Strich davon ab; zur Rechten desselben ziehet gleichfals einen solchen Strich, welcher den Platz bestimmet, wo der Quotient zu stehen komt.

2. Untersuchet nach der pythagorischen Tafel §. 46. wie oft der Divisor in der ersten Ziffer des Dividendus zur Linken, oder wenn solche zu klein ist, in den zwo ersten Ziffern desselben, so ihr als ein Produkt aus Einheiten ansehet, enthalten sei. Die Zahl, so dieses andeutet, setzet in die Stelle des Quotienten.

3. Multipliciret den Divisor durch den gefundenen Quotienten, und setzet das Produkt davon unter die dividirte Zahl.

4. Ziehet es davon ab, den Ueberrest aber setzet nebst der nächstfolgenden Ziffer des Dividendus weiter herunter.

5. Dividiret auf diese Art von neuen die unterhalb stehende Zahl, und setzet den Quotienten davon allezeit um eine Stelle weiter zur Rechten, womit ihr so lange fortfahret, als noch Ziffern in dem Dividendus übrig sind.

6. Bleibet bei der lezten Subtraktion etwas übrig, so ist es ein Zeichen daß der Divisor nicht mehr ein ganzes mal, sondern nur noch ein Teil davon in dem Dividendus enthalten ist.

Zwei-

Zweiter Fal. Wenn der Divisor aus mehrern Ziffern bestehet.

1. Nachdem der Plaz des Dividendus, Divisors und des Quotienten wie vorhero bestimmet worden, so untersuchet, wie oft die erste Ziffer des Divisors zur Linken in der Ersten, oder wenn solche zu klein, in den zwo ersten Ziffern des Dividendus zur Linken enthalten sei, und die Zahl, so solches andeutet, sezet in die Stelle des Quotienten.

2. Multipliciret diesen gefundenen Quotienten durch den ganzen Divisor, und sezet das Produkt davon unter die dividirte Zahl zur Linken. Ist dieses Produkt etwan grösser als die dividirte Zahl, so verringert den Quotienten so lange um Eins, bis sein Produkt entweder der dividirten Zahl ganz gleich, oder doch zunächst kleiner wird, d. i. bis der Unterschied davon geringer ist, als der Divisor.

3. Subtrahiret dieses Produkt von dem Dividendus, und sezet den Ueberrest nebst der nächstfolgenden Ziffer des Dividendus weiter herunter.

4. Dividiret diese Zahl von neuen, und fahret auf diese Art fort, bis keine Ziffer mehr im Dividendus übrig ist.

5. Bleibet bei der lezten Subtraktion noch ein Ueberrest, so sezet ihn in Gestalt eines Bruches zum Quotienten, wovon der Ueberrest der Zähler, der Divisor aber der Nenner

wird,

wird, und anzeiget, daß der Divisor in dem Dividendus noch so oft als dieser Bruch anzeiget, enthalten sei.

Beweis. In der Division ist das Produkt aus dem Divisor in den Quotienten gleich dem Dividendus §. 45. folglich mus dieienige Zahl der wahre Quotient sein, deren Produkt in den Divisor, oder deren einzelne Produkte in denselben zusammengenommen, dem Dividendus gleich werden. Nun werden nach dem vorgeschriebenen Verfahren dergleichen Zahlen gesuchet, deren einzelne Produkte nach und nach dem Dividendus entweder volkommen gleich, oder wenn solches nicht möglich, doch zunächst gleich werden, und der Dividendus wird nach und nach in eben die Produkte zergliedert, woraus er entstanden; folglich ist die dadurch gefundene Zahl der wahre Quotient.

Z. B.

Divis. Divid. Quot.

3 | 7845 | 2615

Prod. 6

18

Prod. 18

4

Prod. 3

15

Prod. 15

— —

432 | 354679 | $821\frac{7}{432}$

3456

907

864

439

432

7 Rest

Zu-

Zusatz.

§. 48. Da es bisweilen geschieht, daß nach der Subtraktion eines einzelnen Produkts, der Ueberrest samt der dazu herunter gesetzten nächsten Ziffer des Dividendus kleiner ist, als der Divisor, so daß derselbe darin nicht enthalten sein kan, so wird in diesem Falle in dem Quotienten eine Nulle gesezt. Weil aber auch alsdan aus dem Quotienten in den Divisor kein Produkt entstehet, folglich von dem Dividendus nichts abzuziehen ist, so bleibt die vorige Zahl stehen, die folgende Ziffer des Dividendus wird dazu gesetzet, und hierauf in der Division gewöhnlich fortgefahren.

Z. B.

```
42 | 4357 | 103 31/42
     42
     ---
      157
      126
      ---
       31 Rest.
```

Zusatz.

§. 49. Wenn der Divisor am Ende rechts Nullen bei sich hat, so kan man sie Kürze halber ansehen, als ob sie nicht vorhanden wären, schneidet daher von dem Dividendus rechts eben so viel Ziffern ab, als im Divisor Nullen vorhanden, und verrichtet die Rechnung nur

mit

mit den übrigen Ziffern. Diese abgeschnittene Ziffern des Dividendus werden aber zulezt dem etwan übrig gebliebenen Ueberreste zugesetzet, und zusammen als der Zähler eines Bruches, wovon der ganze Divisor der Nenner ist, angesehen.

3. B. 32(00 | 7432(56 | $232\frac{856}{3200}$

```
             64
             ---
             103
              96
             ---
              72
              64
             ---
               8
```

Zusatz.

§. 50. Wenn sowohl der Divisor als der Dividendus rechts am Ende gleich viel Nullen hätten, so können sie in allen beiden gänzlich hinweg gelassen werden, als ob sie nicht vorhanden wären. Hat aber der Dividendus mehrere Nullen als der Divisor, so werden von dem erstern nur so viele weggeschnitten, als in dem zweiten sind; im Gegenteil wenn der Divisor mehrere Nullen hat, so werden doch vom Dividendus nebst seinen Nullen noch so viele würkliche Ziffern abgeschnitten, bis sie zusammen denen Nullen des erstern gleich kommen. Und endlich hätte zwar der Dividendus

Nul-

Nullen, der Divisor aber keine, so darf auch von dem erstern nichts weggeschnitten werden.

Z. B.

```
23(000|7.72(000|33 13/23     27(000|38 0(000|14 2/27
       69                           27
       ---                          ----
        8.2                         11.0
        69                          108
        ---                         ----
        13                             2

243(000 | 597(300 | 2 111/243
          486
          ---
          111 Rest

231 | 579000 | 2506 114/231
      462
      ---
      117.0
      1155
      ----
        15.0.0
        1386
        ----
         114
```

Zusatz.

§. 51. Wenn der Divisor zur Linken die Ziffer 1 und übrigens lauter Nullen hat, so ist die Division leicht zu verrichten, indem man nur von dem Dividendus rechts eben so viele Ziffern abschneidet, sie als einen Bruch ansiehet §. 49. und die zur Linken übrig gebliebene Ziffern des Dividendus zum Quotienten annimt.

Z. B.

Z. B.

1(000 | 4325(798 | $4325\frac{798}{1000}$

Zusaz.

§. 52. Weil es bei weitläuftigen Divisionen, wenn der Divisor aus vielen Ziffern bestehet, öfters denen Anfängern schwer fält, sogleich und ohne viele Versuche die wahren Teile des Quotienten zu finden, damit nehmlich das Produkt derselben in den Divisor weder zu gros noch zu klein werde, so kan man sich folgenden Hülfsmittels dabei bedienen. Man suchet nehmlich Anfangs die Produkte des Divisors durch alle Einheiten von Eins bis auf Neun, entweder durch die Addition, oder durch die gewöhnliche Multiplikation, und setzet sie besonders in Gestalt einer Tabelle zusammen. Wenn man demnach während der Division einen Quotienten suchet, so siehet man in dieser Tabelle nach, welches Produkt entweder dem Dividendus völlig gleich komt, oder doch das nächst kleinere ist, so findet man nicht nur sogleich den wahren Quotienten darneben, sondern man darf auch nur das Produkt desselben in den Divisor abschreiben und unter den Dividendus setzen.

Z. B.

1	4235
2	8470
3	12705
4	16940
5	21175
6	25410
7	29645
8	33880
9	38115

```
4235|87.4 2 1 3 62|2064 2492/4235
     8470
     -----
      27.213
      25410
      ------
       18.036
       16940
       ------
        1.0962
         8470
         ----
         2492
```

Aufgabe.

§. 53. Benante Zahlen so in kleinern Arten oder Einheiten gegeben sind, auf grössere zu bringen.

Auflösung. Dividiret die gegebene Zahl durch das ihr eigentümliche Maas §. 32. denn so oft solches darin enthalten ist, so viel grössere Einheiten sind auch in der gegebenen kleinern.

Z. B. Es sollen 43678 Zolle auf Klafter gebracht werden

```
                    6
12 | 4.3678 | 3639 | 606 Kl. 3 Sch. 10 Zoll.
     36       36
     --       --
      76       39
      72       36
      --       --
       47       3 Rest.
       36
       --
       118
       108
       ---
        10 Rest.
```

Aufgabe.

§. 54. Benante Zahlen zu dividiren.

Auflösung. 1. Wenn der Divisor eine unbenante Zahl ist, so bringet den Dividendus auf die kleineste gegebene Einheit §. 41. und dividiret wie gewöhnlich; den Quotienten aber bringet hernach wieder auf eine grössere Einheit §. 53. wenn es thunlich. Oder auch kürzer: dividiret sogleich die gröste Einheit durch den Divisor, wenn es möglich; den Ueberrest bringet auf eine kleinere Einheit, und dividiret von neuen. Sind bei dem Dividendus schon kleinere Einheiten, so müssen solche allezeit zu dem vorhergemeldeten Ueberreste, wenn er auf ihre Benennung gebracht worden, addiret werden.

2. Ist aber auch der Divisor eine benante Zahl, so bringet ihn und den Divisor auf Einheiten von einerlei Benennung §. 22. und dividiret hernach wie gewöhnlich.

Das erste geschieht, wenn eine Zahl in eine gegebene Anzahl gleicher Teile eingeteilet werden sol, und man die Grösse eines Teils zu wissen verlanget. Das andere aber, wenn die Grösse eines Teils gegeben ist, und man zu wissen nöhtig hat, wie viel solcher Teile in der gegebenen Zahl enthalten sind.

Z. B. Es sol eine Länge von 643 Kl. 4 Schuh 8 Zoll in 4 Teile zerleget werden

4 | 643 Kl. 4 Sch. 8 Z. | 160 Kl. 5 Sch. 8 Zoll
Grösse eines Teils.

```
4|643 Kl. 4 Sch. 8 Z.|160 Kl. 5 Sch. 8 Zoll
  4
  --
  24
  24
  --
   3
   6
  --
  22 Sch.
  20
  --
   2
  12
  --
  32 Zoll.
  32
  --
  --
```

Ferner. Es sollen 454 fl. 45 kr. in Teile zerleget werden, deren ieder 4 fl. 15 kr. beträgt

```
4 fl. 15 kr.          454 fl. 45 kr.
60                     60
---                    ------
255               255|27.285|107 Anzahl der Teile
                      25 5
                      ----
                       1 785
                       1 785
                       -----
                        - -
```

Zusaz.

§. 55. Da die Multiplikation und Division entgegen gesezte Rechnungsarten sind, und die leztere nichts als die Auflösung der erstern ist §. 44. 45. so geschiehet auch die Probe der einen durch die andere. Nehmlich

Die Probe der Multiplikation ist, wenn das Produkt durch den einen Faktor dividiret wird, so mus der andere zum Quotienten kommen.

Die Probe der Division gegenteils ist, wenn der Divisor mit dem Quotienten multipliciret wird, so mus der Dividendus zum Produkte kommen. Ist in der Division etwas übrig geblieben, so mus solches noch zu diesem Produkte addiret werden.

Grundsäze.

§. 56. Aus den vier einfachen Rechnungsarten fliessen folgende Grundsäze.

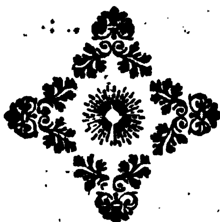
1. Wenn man gleiches zu gleichem addiret, so sind die Summen gleich. Wenn aber gleiches zu grösserm und zu kleinerm addiret wird, so ist die Summe im ersten Falle grösser als im andern.

2. Wenn gleiches von gleichem subtrahiret wird, so sind die Unterschiede gleich. Wenn aber von grösserm und kleinerm gleiches abgezogen wird, so ist der Unterschied im ersten Falle grösser als im andern; wird hingegen von gleichem das grössere und das kleinere abgezogen, so ist der Unterschied im ersten Falle kleiner als im andern.

3. Wenn gleiches mit gleichem multipliciret wird, so sind die Produkte gleich; wird

aber grösseres und kleineres durch gleiches multipliciret, so ist das Produkt im ersten Falle grösser als im andern.

4. Wenn gleiches durch gleiches dividiret wird, so sind die Quotienten gleich. Wenn aber grösseres und kleineres durch gleiches dividiret wird, so ist der Quotient im ersten Falle grösser als im andern. Wird aber gegenteils gleiches durch grösseres und kleineres dividirt, so ist der Quotient im ersten Falle kleiner als im andern.



Zweiter Abschnit.

Von den ersten Gründen der Buchstaben-Rechnung.

Erstes Hauptstück.

Von Bezeichnung der Grössen überhaupt.

Erklärung.

§. 57.

Die Algebra (Buchstaben-Rechenkunst) ist die Wissenschaft mit Grössen überhaupt zu rechnen, oder aus einigen gegebenen bekanten Grössen eine unbekante zu finden, so zu den erstern eine gegebene Verhältnis haben sol §. 15. Da nun unter diesen Grössen überhaupt auch die Zahlen mit begriffen sind, so ist auch die gemeine Rechenkunst bereits in der Algebra enthalten, welche daher auch die algemeine Rechenkunst benennet zu werden pfleget.

Wil-

Wilkührlicher Saz.

§. 58. Da in der Algebra mit Grössen überhaupt gerechnet wird, §. 57., so müssen auch Zeichen vorhanden sein, durch welche diese Grössen angedeutet und von einander unterschieden werden können. Man hat hiezu die Buchstaben und besonders die kleinen des lateinischen Alphabets erwählet. Eine mit Buchstaben ausgedrückte Grösse heist daher eine **algebraische Grösse.** Und da in einer ieden Rechnung zwoerlei Grössen vorhanden sind, nehmlich zuerst die gegebene und bekante, und hernach die gesuchte und unbekante, so werden die erstern durch die Anfangs-Buchstaben des Alphabets, a, b, c, d, u. s. w. die andern aber durch die leztern x, y, z, ausgedrückt.

Erklärung.

§. 59. Grössen, so einander aufheben und wiedersprechen, sind **entgegen gesezt.** Dieienige derselben so als würklich vorhanden angesehen wird, heist die **beiahende Grösse,** (quantitas positiva), das **Gegenteil** davon aber, oder dieienige Grösse, so der vorigen entgegen gesezt ist, heist die **verneinende Grösse** (quantitas negativa). Das Zeichen der erstern ist (+) so als **mehr** (plus) ausgesprochen wird; das Zeichen der andern aber ist

(—) so weniger (minus) heist. Beide werden vor dem Buchstaben gesezet, so die Grösse andeutet. Jedoch wenn eine beiahende Grösse allein, oder auch voran stehet, so wird das Zeichen + ausgelassen.

Es komt blos auf den Zusammenhang und den iedesmaligen Verstand an, in welchem die Grössen genommen werden, welche von den beiden entgegen gesezten als positiv oder negativ angesehen werden müsse, und einerlei Grösse kan in verschiedenem Sinne bald beiahend bald verneinend sein. Z. B. Zwei Bewegungskräfte eines Körpers nach entgegen gesezten Richtungen, vorwerts oder rückwerts, hinauf oder hinunter, u. s. w. sind entgegengesezt, und heben einander wenigstens zum Teil auf. Wird nun von der erstern Bewegung oder von der ersten Richtung gehandelt, so ist diese Kraft positiv, und die andere negativ. Ist aber gegenteils von der Bewegung nach andern Richtungen die Rede, so wird auch die andere als positiv und die erstere als negativ angesehen. Mehrere Beispiele davon hat man bei Vermögen und Schuld, Wärme und Kälte, Zuwachs und Abnahme, Ausdehnung und Zusammenziehung, oder Vermehrung und Verminderung des Raums und dergleichen, welche insgesamt in beiderlei Verstande genommen werden können, nachdem es die iedesmalige Umstände erfordern. Folglich ist dieses keine Eigenschaft, so einer Grösse vor sich betrachtet und wesentlich, sondern allezeit nur in Vergleichung mit einer andern zukomt. Denn an sich betrachtet wird eine iede Grösse als positiv und beiahend angesehen.

Zusatz.

§. 60. Bei der Addition sol eine Grösse um eine andere vermehret werden §. 18. Dieses kan im eigentlichen Verstande nur durch eine positive Grösse geschehen, welche durch + ausgedrücket wird, §. 59. folglich ist auch + zugleich das Zeichen der Addition. Desgleichen, da bei der Subtraktion eine Grösse vermindert werden sol, §. 18. und dahero eine andere davon weggenommen und aufgehoben werden mus, so wird solche dadurch verneinend. Da nun das Zeichen der verneinenden Grösse — ist, so ist solches auch zugleich das Zeichen der Subtraktion.

Erklärung.

§. 61. Wenn in einer algebraischen Grösse nur ein Teil ausgedrückt wird, oder nicht mehrere Teile durch die Zeichen + oder — mit einander verbunden werden, so ist sie einfach (quantitas simplex). Werden aber mehrere Teile durch die bemeldete Zeichen mit einander verbunden, so ist sie zusammengesezt (polynomisch, (quantitas composita). Diese besonders ausgedrückte Teile der Grösse heissen Glieder (termini); und nachdem die Anzahl dieser Glieder es erfordert, wird die Grösse zweinamigt, dreinamigt, viernamigt, (binomisch, trinomisch, quadrinomisch) u. s. w. genennet.

Z. B. So ist a nur ei einfache, aber a + b — c eine zusammengesez Grösse, und da drei Glieder vorhanden sind, so ist sie trinomisch.

Zusaz.

§. 62. Bei den zusammengesezten Grössen ist es einerlei, in welcher Ordnung die Glieder auf einander folgen, wenn sie nur ihren eigentlichen Wehrt behalten, und ihr Zeichen nicht geändert wird; folglich haben sie keinen Rang wie die Ziffern §. 28. oder keinen Wehrt, so von ihrer Stelle herrührete. Jedoch wird gemeiniglich, wenn keine besondere Ursache des Gegenteils vorhanden, der Anfang mit einem positiven Gliede gemacht.

So ist z. B. $a + b + c - d = b + c + a - d = c + b - d + a$ u. s. w.

Erklärung.

§. 63. Wenn eine algebraische Grösse etlichemal genommen werden sol, so wird vor dem Buchstaben, der sie andeutet, eine Ziffer gesetzet, so die Zahl derselben ausdrücket. Diese Zahl heist der Coefficient. Wenn aber eine Grösse nur einmal zu nehmen ist, so wird kein Coefficient voran gesetzet.

Anstaat demnach $a + a + a$ zu setzen, setzet man $3a$, wo die Zahl 3 der Coefficient ist. Man setzet aber ferner a, und nicht $1a$.

Zu=

Zusatz.

§. 64. Positive und negative Grössen, folglich auch die Zeichen + und — heben einander auf §. 59. Wenn demnach in einer zusammengesezten Grösse einerlei Buchstaben, iedoch mit verschiedenem Zeichen, vorkommen, oder ein Glied beiahend, das andere aber verneinend ist, so heben sie einander auf. Haben diese mit einerlei Buchstaben bezeichnete Glieder Coefficienten mit sich, so hebt eine gleiche Anzahl beiahender Einheiten eine gleiche Anzahl verneinender auf. Folglich können sie weggelassen, und nur der Ueberrest von dem grössern Gliede beibehalten werden.

Z. B. $a - a = 0$, und $5a - 2a = 3a$. Ferner $2b - 3b = - b$.

Wilkührlicher Saz.

§. 65. Wenn die Multiplikation einfacher algebraischer Grössen angedeutet werden sol, so werden die Faktoren entweder durch einen Punkt, oder durch das Zeichen (×) mit einander verbunden; oder auch noch gewöhnlicher, ohne alles Zeichen dichte zusammen gesetzet. Sind die Faktoren zusammengesezte Grössen, so pflegt man sie entweder ieden besonders in eine Parenthesis [ ] einzuschliessen, oder auch eine Linie darüber zu ziehen, und sie sodann mit einem von den Multiplikationszeichen zu verbinden.

Wenn

Wenn daher a mit b zu multipliciren, so ist das Produkt entweder a . b, oder auch a × b, oder am besten ab. Ferner wären die Faktoren a + b — c und d + e — f, so ist das Produkt (a + b — c). (d + e — f), oder auch $\overline{a + b - c} \times \overline{d + e - f}$.

Erklärung.

§. 66. Wenn eine Grösse etlichemal durch sich selbst multipliciret wird, so setzet man, anstaat den Faktor etlichemal zu wiederholen §. 65. zur Rechten desselben in der Höhe eine Ziffer, so die Zahl andeutet, wie oft diese Wiederholung hätte geschehen sollen. Diese Ziffer heist der **Exponent**. Ist die Grösse zusammengesezt, so wird über solche ein Strich gezogen, und die Zahl des Exponenten zu Ende angesetzet.

Z. B. Anstaat aaa setzet man a^3, wo also die Zahl 3 der Exponent ist; und anstaat $\overline{a + b - c} \times \overline{a + b - c} \times \overline{a + b - c}$ setzet man $\overline{a + b - c}^3$. Indessen ist es an sich gar kein Fehler, wenn auch die Faktoren wie gewöhnlich, ohne Bemerkung des Exponenten zusammen gesetzet werden, und beruhet solches blos auf der iedesmaligen Bequemlichkeit der Rechnung. Der Exponent mus demnach keinesweges mit dem Coefficienten verwechselt werden. Der erstere entstehet durch die Multiplikation, der andere aber durch die Addition.

Willkührlicher Satz.

§. 67. Wenn die Division algebraischer Grössen angezeiget werden sol, so wird entweder unter dem Dividendus eine Linie gezogen und der Divisor darunter geschrieben, oder auch zwischen dem ersten und dem andern das Zeichen (:) gesetzet. Sind die Grössen zusammengesetzet, so wird nach der ersten Art der horizontale Strich nur unter diejenige Glieder gezogen, auf welche sich die Division erstrecken sol; und nach der andern Art werden sie entweder in eine Parenthesis. [ ] eingefast, oder auch ein Strich darüber gezogen.

Z. B. Es wäre a durch b zu dividiren, so setzet

$\frac{a}{b}$ oder a:b.

Ferner, es wäre a + bc — ac
durch db — ad zu dividiren, so setzet

$$\frac{a + bc - ac}{db - ad}$$

oder [a + bc — ac] : [db — ad]

oder auch $\overline{a + bc - ac} : \overline{db - ad}$.

Wäre aber $a - c + \frac{b - f}{d + e}$ geschrieben, so zeiget solches an, daß sich die Division nicht bis auf a — c, sondern nur so weit als der Strich gehet, erstrecken sol.

Durch diese angeführte Zeichen wird bei zusammengesezten Grössen weder die Multiplikation noch

Di-

Division würklich verrichtet, sondern nur angezeiget, weil das erstere, so in den folgenden Hauptstücken gelehret wird, nicht in allen Fällen nöhtig ist.

Zusatz.

§. 68. Da die Division und Multiplikation einander aufheben, und durch die Division des Produkts durch einen Faktor allezeit der andere Faktor zum Quotienten komt, §. 44. 45. so kan allemal, wenn der Divisor in einem Produkte als ein Faktor ausdrücklich angesetzet ist, sowohl die Division als auch dieser Faktor weggelassen, und blos der andere beibehalten werden.

Oder, wenn in dem Dividendus der Divisor als ein Faktor würklich enthalten ist, so darf die Division nicht mehr blos angezeiget, sondern kan würklich verrichtet werden, indem man den Divisor im Dividendus ausstreicht, und den andern Faktor zum Quotienten annimt.

So ist $\frac{ab}{a} = b$, ferner $\frac{aby}{ab} = y$ und

$$\frac{[ab + cd] \times [a \pm b]}{a + b} = ab + cd.$$

Erklärung.

§. 69. Aehnliche Grössen (quantitates homogeneae) sind, so durch einerlei Buchstaben

ben und Exponenten ausgedrücket werden, haben sie aber verschiedene Buchstaben oder wenigstens verschiedene Exponenten, so sind sie **unähnlich** (quantitates heterogeneae)

Z. B. $a + 3ab^2 + c^3 - 2ac^4$ und $a + ab^2 + 2c^3 + 3ac^4$ sind ähnliche, aber $a + b^2 - 3ab^3$ und $a^2 + b - 3ab^2$ sind unähnliche Grössen.

Zweites Hauptstück.

Von der Addition algebraischer Grössen.

Aufgabe.

§. 70.

Algebraische Grössen zu addiren.

Auflösung. 1. Setzet die gegebene Grössen mit ihren vorigen Zeichen zusammen.

2. Sind ähnliche Grössen mit einerlei Zeichen vorhanden, so addiret ihre Coefficienten zusammen, und lasset das Zeichen unverändert; sind aber die Zeichen verschieden, so ziehet die kleinere von dem grössern ab, und zu dem Ueberreste setzet das Zeichen des grössern; Sind endlich die Coefficienten in dem leztern Falle gleich, so heben sie sich völlig auf.

Durch dieses zwiefache leztere Verfahren wird die zusammengesezte Grösse auf weniger

und

und kleinere Glieder gebracht, welches man abkürzen, (reduciren) nennet.

Beweis. In der Addition ist die Summe das Ganze, und die addirende Grössen sind die Teile, §. 18. folglich wird auch das Ganze oder die Summe gefunden, wenn alle Teile unverändert zusammen genommen werden. Finden sich nun ähnliche Grössen mit verschiedenen Zeichen darunter, so werden in dem grössern Gliede eben so viele Einheiten aufgehoben und getilget, als in dem kleinern enthalten sind, §. 64. Folglich bestehet die Summe nur in dem Ueberreste.

Z. B. Es wären 3ab — bc und 2ab — 2bc zu addiren, so setzet $3ab - bc + 2ab - 2bc$

abgekürzt $5ab - 3bc$. Summe.

Ferner $4ac + 3b - 4bd$, und $ac - b + 2bd$

$4ac + 3b - 4bd + ac - b + 2bd$

abgekürzt $5ac + 2b - 2bd$. Summe.

Oder $2a + d - 3b$, und $a - d + 3b$

$2a + d - 3b + a - d + 3b$

und abgekürzt $3a$. Summe.

Man kan hiebei noch merken, daß es bei den Rechnungen mit Buchstaben überhaupt keinesweges nöhtig sei, die gegebene Grössen so unter einander zu setzen, wie mit den Zahlen geschehen, welches bei den leztern nur deswegen erfordert wurde, damit die Ziffern in ihrem gehörigen Range stehen möchten, der aber bei den Buchstaben nicht angetroffen wird; iedoch ist solches wilkührlich.

Drit-

Drittes Hauptstück.

Von der Subtraktion algebraischer Grössen.

Aufgabe.

§. 71.

Algebraische Grössen von einander abzuziehen.

Auflösung. 1. Setzet die abzuziehende Grösse zu der andern, von welcher die Subtraktion geschehen sol, iedoch mit verkehrtem Zeichen, d. i. + wird in — und — in + verwandelt.

2. Kürzet den gefundenen Unterschied ab, wenn es angehet, nach §. 70.

Beweis. Wenn eine beiahende Grösse, von einer andern abgezogen werden sol, so sol sie weggenommen werden und nicht mehr vorhanden sein §. 18. folglich wird sie verneinend, §. 59. und also das Zeichen + in — verwandelt. Sol ferner eine verneinende Grösse subtrahiret werden, so sol sie gleichfals weggenommen und aufgehoben werden. Nun wird eine verneinende Grösse durch nichts anders als durch die ihr entgegengesetzte beiahende Grösse

aufgehoben §. 59. welche demnach gesetzet werden mus. Folglich wird die verneinende Grösse beiahend und positiv, d. i. das Zeichen — wird in + verwandelt.

Wenn demnach b von a abgezogen werden sol, so ist der Unterschied $a - b$; und wenn von a abgezogen werden sol $b - c$, so ist der Unterschied $a - b + c$.

Z. B. Von $5a + 6ac - 4bc$ sei abzuziehen $2a - 3ac + 3bc$, so ist der Unterschied

$5a + 6ac - 4bc - 2a + 3ac - 3bc$, und

abgekürzt $3a + 9ac - 7bc$

Ferner von $4a^3 - 2c + 3bd$ sol abgezogen werden $3a^3 + 6c - 2bd$, so ist der Unterschied

$4a^3 - 2c + 3bd - 3a^3 - 6c + 2bd$, und

abgekürzt $a^3 - 8c + 5bd$

Oder von $3ab + 3c^2 + 7bc$ wird abgezogen $2c^2 - ab + 7bc$, so ist der Unterschied

$3ab + 3c^2 + 7bc - 2c^2 + ab - 7bc$, und

abgekürzt $4ab + c^2$

Endlich von $ad - bc + e^2$ wird abgezogen $4ad + 3bc - e + dc$, so ist der Unterschied

$ad - bc + e^2 - 4ad - 3bc + e - dc$,

abgekürzt $-3ad - 4bc + e^2 + e - dc$

Man siehet hieraus zugleich, daß durch die Addition einer negativen Grösse eine würkliche Sub-

trak-

traktion, und im Gegenteil durch die Subtraktion derselben eine würkliche Addition entstehe. So ist z. B. die Summe von 5a und von — 3a = 5a — 3a = 2a. Der Unterschied von eben diesen Grössen ist aber 5a + 3a = 8a.

Viertes Hauptstück.

Von der Multiplikation algebraischer Grössen.

Lehrsatz.

§. 72.

Wenn algebraische Grössen durch einander multipliciret werden, so wird das Produkt positiv, wenn beide Faktoren einerlei Zeichen haben; haben sie aber verschiedene Zeichen, so wird es negativ.

Beweis. In der Multiplikation sol der eine Faktor so oft genommen werden, als der andere anzeiget §. 19. Wenn demnach eine beiahende Grösse mit einer andern beiahenden multipliciret wird, so sol die erstere würklich so oft genommen werden, als die andere anzeiget, folglich ist das Produkt positiv §. 59. Desgleichen, sol eine verneinende Grösse mit

einer beiahenden multipliciret werden, so wird die erstere verneinende würklich so oft genommen, als die beiahende anzeiget, und bleibet daher auch im Produkte unverändert, oder dasselbe ist negativ.

Wird ferner eine beiahende Grösse durch eine verneinende multipliciret, so sol die erstere so oft aufgehoben und getilget werden, als die andere anzeiget. Wenn aber eine positive Grösse aufgehoben wird, so wi o sie verneinend §. 59. folglich mus auch ,as Produkt verneinend werden.

Wird endlich eine verneinende Grösse mit einer andern verneinenden multipliciret, so sol die erstere verneinende so vielmal aufgehoben werden, als die andere anzeiget. Nun kan eine verneinende Grösse durch nichts anders aufgehoben werden, als durch die ihr entgegen gesezte oder positive Grösse §. 59. Folglich mus das Produkt positiv werden. Hieraus fliest demnach folgende algemeine Regel.

1. Wenn beide Faktoren einerlei Zeichen haben, entweder alle beide + oder alle beide —, so ist das Produkt beiahend, und bekomt +.

2. Haben aber die Faktoren verschiedene Zeichen, das ist, der eine + und der andere —, so wird das Produkt allemal verneinend, und bekomt —.

Wenn

Wenn also a mit b multipliciret wird, so ist das Produkt ab oder + ab. Wird — a mit — b multipliciret, so ist das Produkt gleichfals + ab. Wird aber + a mit — b multipliciret; oder auch — a mit + b, so ist das Produkt allezeit — ab.

Aufgabe.

§. 73. Algemeine Grössen durch einander zu multipliciren.

Auflösung. 1. Sezet die Faktoren unter einander, und sondert sie durch einen Strich von dem gesuchten Produkte ab.

2. Multipliciret alle Glieder des einen Faktors durch alle Glieder des andern, indem ihr die Buchstaben dicht an einander sezet §. 65.

3. Haben die Faktoren oder die Glieder derselben einerlei Zeichen, so gebet ihrem Produkte +, haben sie aber verschiedene, so gebet dem Produkte — §. 72.

4. Befinden sich Coefficienten bei den Gliedern, so multipliciret sie gleichfals wie gewöhnliche Zahlen durch einander §. 63.

5. Wenn bei Gliedern, so aus einerlei Buchstaben bestehen, Exponenten vorhanden, so dürfen die leztern ohne Wiederholung des Buchstabens nur zusammen addiret werden, und die Summe wird der Exponent des Produkts §. 66.

6. Verkürzet das Produkt, wenn es angehet, nach §. 70.

Da die Buchstaben keinen Rang haben §. 62. so kan man 1. die Faktoren neben und unter einander setzen, wie es iedesmal am bequemsten scheinet. 2. Die einzelne Produkte des Multiplikators haben nicht nöhtig, wie bei den Zahlen unter einander gesezt zu werden §. 40., sondern können sogleich in einer Reihe fort geschrieben werden. 3. Es ist auch vollkommen gleichgültig, in welcher Ordnung sowohl die Glieder der Faktoren als auch des Produkts gesetzet werden. 4. Endlich kan hiebei noch bemerket werden, daß da die Exponenten blos in der Absicht gesetzet werden, um die häuffige Wiederholung eines Buchstabens zu vermeiden, §. 66. und bei iedesmaliger Multiplicirung durch denselben der Buchstabe noch einmal hätte hinzugesetzet werden sollen §. 65., so erhält man den Exponenten des Produkts, wenn die Exponenten beider Faktoren zusammen addiret werden, und daher ist $aaa \times aa = a^3 \times a^2 = aaaaa = a^5$.

Z. B.

$a - b$ } Faktoren
$c - d$ }

$ac - bc - ad + bd$ Prod.

$3a + 5b$
$5a - 2c$

$15a^2 + 25ab - 6ac - 10bc.$

$$\begin{array}{l} a - b + c \\ a - b - c \\ \hline a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc - ac + bc - c^2 \\ \hline \end{array}$$

dieses abgekürzt, giebt $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

$$\begin{array}{l} a^3 + b \\ a^2 - b^2 \\ \hline a^5 + a^2b - a^3b^2 - b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a^3 + 3b - 1 \\ 5a^2b + 4 \\ \hline 15a^5b + 15a^2b^2 - 5a^2b + 12a^3 + 12b - 4. \end{array}$$

Fünftes Hauptstück.

Von der Division der algebraischen Grössen.

Lehrsatz.

§. 74.

Wenn in der Division der Dividendus und der Divisor gleiche Zeichen haben, so wird der Quotient positiv; haben sie aber verschiedene Zeichen, so wird derselbe negativ; wie in der Multiplikation §. 72.

Beweis. Die Division ist die Auflösung des Produkts in seine Faktoren, der Dividen-

dus ist das Produkt, der Divisor der eine und der Quotient der andere Faktor §. 44. Folglich mus auch in der Division der Quotient eben das Zeichen bekommen, so der gesuchte andere Faktor in der Multiplikation gehabt hat. Ist nun erstens der Dividendus oder das Produkt positiv, so haben beide Faktoren einerlei Zeichen gehabt §. 72., folglich hat in diesem Falle der Divisor +, so bekomt es auch der Quotient, und wird daher positiv; hat derselbe aber —, so mus gleichfals der Quotient — bekommen, folglich negativ werden. Ist ferner zweitens der Dividendus oder das Produkt negativ, so haben beide Faktoren verschiedene Zeichen gehabt §. 72., folglich hat in diesem Falle der Divisor —, so mus der Quotient + bekommen und positiv werden; hat iener aber + so mus der Quotient — bekommen und negativ werden.

In beiden Fällen bekomt daher allezeit der Quotient +, wenn der Dividendus und Divisor einerlei; im Gegenteile bekomt er —, wenn sie verschiedene Zeichen führen.

Es ist also $\frac{+ab}{+a} = +b$, und $\frac{-ab}{-a} = +b$;

Ferner $\frac{ab}{-a} = -b$, und $\frac{-ab}{+a} = -b$.

Aufgabe.

§. 75. Algemeine Grössen durch einander zu dividiren.

Auflösung. 1. Setzet den Dividendus und den Divisor nach §. 47. zusammen, und bestimmet gleichfals zur Rechten des erstern den Platz für den Quotienten.

2. Wenn der Divisor und Dividendus nur einfache Grössen sind, oder aus einem Gliede bestehen §. 61. so streichet im Dividendus den Divisor als einen Faktor aus, den übrig bleibenden aber setzet in die Stelle des Quotienten §. 68. und gebet ihm das gehörige Zeichen §. 74. Befinden sich Coefficienten dabei, so dividiret solche gleichfals durch einander, und setzet den Quotienten derselben zu dem Quotienten der Buchstaben.

3. Wenn der Divisor eine einfache Grösse ist, der Dividendus aber aus mehrern Gliedern bestehet, so dividiret nach vorhergehender Art das erste Glied des leztern, durch den erstern, und suchet dazu den Quotienten.

4. Bestehen endlich beide aus mehrern Gliedern, so dividiret das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors auf vorige Art.

5. Multipliciret den gefundenen Quotienten mit dem ganzen Divisor, und setzet das Produkt davon unter dem Dividendus.

6. Subtrahiret solches davon; damit aber diese Subtraktion desto bequemer geschehen könne, so verkehret sogleich die Zeichen des gefundenen Produkts §. 71.

7. Dividiret auf diese Art noch ferner den Ueberrest, um die übrige Teile des Quotienten zu bekommen, wobei ihr den Divisor in demienigen Gliede des Dividendus suchet, in welchem ihr ihn findet.

8. Kommen endlich zum Ueberreste Grössen vor, so nicht weiter dividiret werden können, so verbindet sie nur mit dem Divisor durch das Divisionszeichen §. 67.

Z. B. Es sei abcd durch bc zu dividiren, so ist ad der Quotient; ferner 6ab durch 3a giebt 2b, und 4abc durch — a giebt — 4bc zum Quotienten.

Ferner

```
Divis.   Dividendus         Quot.
   a | ab + ac — ad | b + c — d
Prod. — ab
     ______________
          + ac — ad Rest
   Prod. — ac
          __________
               — ad Rest
        Prod. + ad
             ______
               —
```

ac

$$2c \mid 4ac - 6bc + 4cc \mid 2a - 3b + 2c$$
$$-4ac$$
$$-6bc + 4cc$$
$$+6bc$$
$$4cc$$
$$-4cc$$
$$- \; -$$

$$a - b + c \mid aa - bb + 2bc - cc \mid a + b - c$$
$$-aa + ab - ac$$
$$-bb + 2bc - cc + ab - ac$$
$$-ab + bb - bc$$
$$bc - cc - ac$$
$$+ac - bc + cc$$
$$- \; - \; -$$

$$4a - 5c \mid 8aa - 6ac - 5cc + 3bc \mid 2a + c + \frac{3bc}{4a - 5c}$$
$$-8aa + 10ac$$
$$4ac - 5cc + 3bc$$
$$-4ac + 5cc$$
$$3bc$$

Zusatz.

§. 76. 1. Ist ein Glied des Dividendus ganz gleich mit dem Divisor, so wird im Quotienten 1. mit seinem gehörigen Zeichen gesetzet.

2. Hat der Dividendus einen Coefficienten, der Divisor aber keinen, oder vielmehr ist der

der Coefficient des leztern 1, so wird der erstere auch der Coefficient des Quotienten.

3. Hat hingegen der Divisor einen Coefficienten, der Dividendus aber keinen, so wird die Division mit demselben nur in Gestalt eines Bruches angezeiget.

Z. B.

$$-ac \mid abc + bd - ac \mid -b + 1 + \frac{bd}{-ac}$$
$$-abc$$
$$+bd - ac$$
$$+ac$$
$$bd$$

$$a + 1 \mid aa - 5ab + 2a - 5b + 1 \mid a - 5b + 1$$
$$-aa - a$$
$$-5ab + a - 5b + 1$$
$$+5ab + 5b$$
$$a + 1$$
$$-a - 1$$
$$-\ \ -$$

$$3c \mid abc \mid \frac{ab}{3} \text{ und } 5a \mid aac - ab \mid \frac{ac}{5} - \frac{b}{5} = \frac{ac - b}{5}.$$

Zusatz.

§. 77. Da in der Multiplikation die Exponenten der Faktoren im Produkte zusammen addiret werden, §. 73. so werden gegenteils in der Division die Exponenten des Divisors

von

von den Exponenten des Dividendus abgezogen. Hieraus folget:

1. Wenn bei einerlei Buchstaben die Exponenten gleich sind, so ist 1 davon der Quotient; so ist $\frac{a^3}{a^3} = 1$.

2. Ist der Exponent des Dividendus grösser als der Exponent des Divisors, so wird der leztere von dem erstern abgezogen, und der Ueberrest wird der Exponent des Quotienten; so ist $\frac{a^5}{a^3} = a^2$ oder $\frac{aaaaa}{aaa} = aa$ und $\frac{a^5 + a^4b}{a^3} = a^2 + ab$.

3. Ist endlich der Exponent des Divisors grösser als des Dividendus, so daß die Division nicht volständig sondern nur zum Teil geschehen kan, und das übrige gewöhnlich angedeutet werden mus, so ziehet die Exponenten von einander ab, und den Ueberrest nehmet zum Exponenten des neuen Divisors. So ist $\frac{a^3b}{a^5} = \frac{aaab}{aaaaa} = \frac{b}{aa} = \frac{b}{a^2}$, und $\frac{ac^2d^3}{bc^3d^5} = \frac{a}{bcd^2}$.

Ferner $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ und $\frac{a^5c^2}{a^7c^4d^3} = \frac{1}{a^2c^2d^3}$.

Z. B. $a^3 - b^2 \mid a^3 - b^2 + a^5 - a^2b^2 \mid 1 + a^2$

$$\begin{array}{r} -\,a^3 + b^2 \qquad\qquad\qquad \\ \hline a^5 - a^2b^2 \\ -\,a^5 + a^2b^2 \\ \hline -\quad - \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l|l}
a^3 & a^5 + a^2b & a^2 + \frac{b}{a} \\
 & -a^5 & \\
\hline
 & \quad a^2b & \\
 & -a^2b & \\
\hline
 & \quad - &
\end{array}
$$

Zusatz.

§. 78. Obgleich die Buchstaben keinen Rang haben, und man folglich die Glieder des Dividendus und des Divisors in einer Ordnung stellen kan, in welcher man wil, so kan dennoch bisweilen ein Zweifel vorfallen, in welchem Gliede des Dividendus man den iedesmaligen Quotienten suchen müsse. Um dieses zu vermeiden, kan man beide Grössen sowohl den Dividendus als den Divisor nach einerlei Buchstaben ordnen, das ist, man wählet einen in beiden befindlichen Buchstaben, und lässet die Glieder nach der Grösse des Exponenten desselben von der Linken zur Rechten auf einander folgen, wo alsdann die Bestimmung des iedesmaligen Quotienten am leichtesten geschieht.

Z. B. In folgendem Dividendus und Divisor sind die Glieder nach dem Buchstaben a geordnet.

$$2a^2 - 3ab + 4b^2 \mid 2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3$$
$$+ 24b^4 \mid a^2 - 5ab + 6b^2$$
$$- 2a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2$$
$$- 10a^3b + 27a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4$$
$$+ 10a^3b - 15a^2b^2 + 20ab^3$$
$$12a^2b^2 - 18ab^3 + 24b^4$$
$$- 12a^2b^2 + 18ab^3 - 24b^4$$
$$- \quad - \quad -$$

Hätte man sie aber nach dem Buchstaben b ordnen wollen, so wären sie folgender Gestalt zu stehen gekommen.

$$4b^2 - 3ab + 2a^2 \mid 24b^4 - 38ab^3 + 31a^2b^2$$
$$- 13a^3b + 2a^4 \mid 6b^2 - 5ab + a^2.$$



dus ist das Produkt, der Divisor der eine und der Quotient der andere Faktor §. 44. Folglich mus auch in der Division der Quotient eben das Zeichen bekommen, so der gesuchte andere Faktor in der Multiplikation gehabt hat. Ist nun erstens der Dividendus oder das Produkt positiv, so haben beide Faktoren einerlei Zeichen gehabt §. 72., folglich hat in diesem Falle der Divisor +, so bekomt es auch der Quotient, und wird daher positiv; hat derselbe aber —, so mus gleichfals der Quotient — bekommen, folglich negativ werden. Ist ferner zweitens der Dividendus oder das Produkt negativ, so haben beide Faktoren verschiedene Zeichen gehabt §. 72., folglich hat in diesem Falle der Divisor —, so mus der Quotient + bekommen und positiv werden; hat iener aber + so mus der Quotient — bekommen und negativ werden.

In beiden Fällen bekomt daher allezeit der Quotient +, wenn der Dividendus und Divisor einerlei; im Gegenteile bekomt er —, wenn sie verschiedene Zeichen führen.

Es ist also $\frac{+ab}{+a} = +b$, und $\frac{-ab}{-a} = +b$;

Ferner $\frac{ab}{-a} = -b$, und $\frac{-ab}{+a} = -b$.

Auf-

Aufgabe.

§. 75. Algemeine Grössen durch einander zu dividiren.

Auflösung. 1. Setzet den Dividendus und den Divisor nach §. 47. zusammen, und bestimmet gleichfals zur Rechten des erstern den Platz für den Quotienten.

2. Wenn der Divisor und Dividendus nur einfache Grössen sind, oder aus einem Gliede bestehen §. 61. so streichet im Dividendus den Divisor als einen Faktor aus, den übrig bleibenden aber setzet in die Stelle des Quotienten §. 68. und gebet ihm das gehörige Zeichen §. 74. Befinden sich Coefficienten dabei, so dividiret solche gleichfals durch einander, und setzet den Quotienten derselben zu dem Quotienten der Buchstaben.

3. Wenn der Divisor eine einfache Grösse ist, der Dividendus aber aus mehrern Gliedern bestehet, so dividiret nach vorhergehender Art das erste Glied des leztern, durch den erstern, und suchet dazu den Quotienten.

4. Bestehen endlich beide aus mehrern Gliedern, so dividiret das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors auf vorige Art.

5. Multipliciret den gefundenen Quotienten mit dem ganzen Divisor, und setzet das Produkt davon unter dem Dividendus.

6. Subtrahiret solches davon; damit aber diese Subtraktion desto bequemer geschehen könne, so verkehret sogleich die Zeichen des gefundenen Produkts §. 71.

7. Dividiret auf diese Art noch ferner den Ueberrest, um die übrige Teile des Quotienten zu bekommen, wobei ihr den Divisor in demienigen Gliede des Dividendus suchet, in welchem ihr ihn findet.

8. Kommen endlich zum Ueberreste Grössen vor, so nicht weiter dividiret werden können, so verbindet sie nur mit dem Divisor durch das Divisionszeichen §. 67.

Z. B. Es sei abcd durch bc zu dividiren, so ist ad der Quotient; ferner 6ab durch 3a giebt 2b, und 4abc durch — a giebt — 4bc zum Quotienten.

Ferner

Divis.	Dividendus	Quot.
a	ab + ac — ad	b + c — d
Prod.	— ab	
	+ ac — ad Rest	
Prod.	— ac	
	— ad Rest	
Prod.	+ ad	
	—	

$$2c \mid 4ac - 6bc + 4cc \mid 2a - 3b + 2c$$
$$-4ac$$
$$-6bc + 4cc$$
$$+6bc$$
$$4cc$$
$$-4cc$$
$$- \; -$$

$$a - b + c \mid aa - bb + 2bc - cc \mid a + b - c$$
$$-aa + ab - ac$$
$$-bb + 2bc - cc + ab - ac$$
$$-ab + bb - bc$$
$$bc - cc - ac$$
$$+ac - bc + cc$$
$$- \; - \; -$$

$$4a - 5c \mid 8aa - 6ac - 5cc + 3bc \mid 2a + c + \frac{3bc}{4a - 5c}$$
$$-8aa + 10ac$$
$$4ac - 5cc + 3bc$$
$$-4ac + 5cc$$
$$3bc$$

Zusatz.

§. 76. 1. Ist ein Glied des Dividendus ganz gleich mit dem Divisor, so wird im Quotienten 1. mit seinem gehörigen Zeichen gesetzet.

2. Hat der Dividendus einen Coefficienten, der Divisor aber keinen, oder vielmehr ist

der

der Coefficient des leztern 1, so wird der erstere auch der Coefficient des Quotienten.

3. Hat hingegen der Divisor einen Coefficienten, der Dividendus aber keinen, so wird die Division mit demselben nur in Gestalt eines Bruches angezeiget.

Z. B.

$$-ac \mid abc + bd - ac \mid -b + 1 + \frac{bd}{-ac}$$
$$-abc$$
$$\overline{+bd - ac}$$
$$+ac$$
$$\overline{bd}$$

$$a + 1 \mid aa - 5ab + 2a - 5b + 1 \mid a - 5b + 1$$
$$-aa - a$$
$$\overline{-5ab + a - 5b + 1}$$
$$+5ab + 5b$$
$$\overline{a + 1}$$
$$-a - 1$$
$$\overline{- \quad -}$$

$3c \mid abc \mid \frac{ab}{3}$ und $5a \mid aac - ab \mid \frac{ac}{5} - \frac{b}{5} = \frac{ac - b}{5}$.

Zusaz.

§. 77. Da in der Multiplikation die Exponenten der Faktoren im Produkte zusammen addiret werden, §. 73. so werden gegenteils in der Division die Exponenten des Divisors

von

von den Exponenten des Dividendus abgezogen. Hieraus folget:

1. Wenn bei einerlei Buchstaben die Exponenten gleich sind, so ist 1 davon der Quotient; so ist $\frac{a^3}{a^3} = 1$.

2. Ist der Exponent des Dividendus grösser als der Exponent des Divisors, so wird der leztere von dem erstern abgezogen, und der Ueberrest wird der Exponent des Quotienten; so ist $\frac{a^5}{a^3} = a^2$ oder $\frac{aaaaa}{aaa} = aa$ und $\frac{a^5 + a^4b}{a^3} = a^2 + ab$.

3. Ist endlich der Exponent des Divisors grösser als des Dividendus, so daß die Division nicht volständig sondern nur zum Teil geschehen kan, und das übrige gewöhnlich angedeutet werden mus, so ziehet die Exponenten von einander ab, und den Ueberrest nehmet zum Exponenten des neuen Divisors. So ist $\frac{a^3b}{a^5} = \frac{aaab}{aaaaa} = \frac{b}{aa} = \frac{b}{a^2}$, und $\frac{ac^2d^3}{bc^3d^5} = \frac{a}{bcd^2}$.

Ferner $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ und $\frac{a^5c^2}{a^7c^4d^3} = \frac{1}{a^2c^2d^3}$.

Z. B. $a^3 - b^2 \mid a^3 - b^2 + a^5 - a^2b^2 \mid 1 + a^2$

$$\begin{array}{r} -a^3 + b^2 \qquad\qquad\qquad \\ \hline a^5 - a^2b^2 \\ -a^5 + a^2b^2 \\ \hline - \quad - \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|l|l}
a^5 & a^5 + a^2b & a^2 + \frac{b}{a} \\
-a^5 & & \\
\hline
 & a^2b & \\
 & -a^2b & \\
\hline
 & - &
\end{array}
$$

Zusaz.

§. 78. Obgleich die Buchstaben keinen Rang haben, und man folglich die Glieder des Dividendus und des Divisors in einer Ordnung stellen kan, in welcher man wil, so kan dennoch bisweilen ein Zweifel vorfallen, in welchem Gliede des Dividendus man den iedesmaligen Quotienten suchen müsse. Um dieses zu vermeiden, kan man beide Grössen sowohl den Dividendus als den Divisor nach einerlei Buchstaben ordnen, das ist, man wählet einen in beiden befindlichen Buchstaben, und lässet die Glieder nach der Grösse des Exponenten desselben von der Linken zur Rechten auf einander folgen, wo alsdann die Bestimmung des iedesmaligen Quotienten am leichtesten geschieht.

Z. B. In folgendem Dividendus und Divisor sind die Glieder nach dem Buchstaben a geordnet.

$$2a^2 - 3ab + 4b^2 \mid 2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4 \mid a^2 - 5ab + 6b^2.$$

$$\begin{array}{r}
-2a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
-10a^3b + 27a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4 \\
+10a^3b - 15a^2b^2 + 20ab^3 \qquad \\
\hline
12a^2b^2 - 18ab^3 + 24b^4 \\
-12a^2b^2 + 18ab^3 - 24b^4 \\
\hline
- \quad - \quad - \qquad
\end{array}$$

Hätte man sie aber nach dem Buchstaben b ordnen wollen, so wären sie folgender Gestalt zu stehen gekommen.

$$4b^2 - 3ab + 2a^2 \mid 24b^4 - 38ab^3 + 31a^2b^2 - 13a^3b + 2a^4 \mid 6b^2 - 5ab + a^2.$$



Drit-

Dritter Abschnit.
Von den Brüchen.

Erstes Hauptstück.
Von den Brüchen überhaupt.

Erklärung.

§. 79.

Wenn in einer Zahl die Menge der Einheiten wiederum als Teile von einer andern Einheit, oder eines andern Ganzen angesehen werden, so ist es ein **Bruch** (gebrochene Zahl); wo nicht, so ist es eine **ganze Zahl**. Dieienige Zahl nun, welche anzeiget, aus wie viel Teilen das Ganze bestehet, ist der **Nenner** (denominator); dieienige aber, so die Menge der Teile, so in dem Bruche davon genommen werden, andeutet, ist der **Zähler** (numerator). Je grösser die Menge dieser Teile, oder ie grösser der Zähler ist, bei einerlei Nenner, desto grösser ist der Bruch, und umgekehrt.

Das

Das Zeichen eines Bruches ist wie bei der Division §. 67. ein horizontaler Strich, oberhalb desselben der Zähler, und unterhalb der Nenner gesetzet wird. Wenn z. B. ein Schuh in 12 Zolle oder Teile geteilet wird, und 4 derselben davon genommen werden, so sind 4 Zolle so viel als $\frac{4}{12}$ eines Schuhes.

Erklärung.

§. 80. Wenn in einem Bruche der Zähler kleiner als der Nenner, so ist es ein **eigentlicher** (wahrer) **Bruch**; ist aber das Gegenteil, nehmlich der Zähler dem Nenner gleich, oder auch noch grösser, worin folglich das Ganze enthalten ist, so ist es ein **uneigentlicher Bruch** (fractio spuria).

Z. B. $\frac{3}{4}$ ist ein wahrer, aber $\frac{4}{4} = 1$ und $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ sind uneigentliche Brüche.

Zusatz.

§. 81. Hieraus fliessen demnach zwo Folgerungen:

1. Da in einem uneigentlichem Bruche das Ganze ein oder etlichemal enthalten ist, so werden solche gefunden, oder der Bruch wird **aufgelöset**, wenn der Zähler durch den Nenner dividiret wird; bleibet dabei etwas übrig, so ist solches ein eigentlicher Bruch.

So ist z. B. $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$ und

$$\frac{2bc + a}{b} = 2c + \frac{a}{b}.$$

2. Um Ganze in Brüchen vorzustellen, oder in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln, darf man sie nur mit dem gegebenen Nenner multipliciren, um den Zähler des Bruches zu bekommen; befindet sich aber schon ein Bruch dabei, so mus dessen Zähler dazu addiret werden.

So ist z. B. $6\frac{3}{4} = \frac{27}{4}$; $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$,

und $4a + \frac{bx}{2a} = \frac{8aa + bx}{2a}$.

Lehrsatz.

§. 82. Ein Bruch ist ein Quotient des Zählers durch den Nenner.

Beweis. In der Division enthält der Dividendus so viel oder so oft den Divisor als der Quotient die Einheit §. 20. Nun enthält auch der Zähler so oft den Nenner oder so viel von demselben, als der Bruch von der Einheit oder von dem Ganzen, §. 79. folglich kan in iedem Bruche der Zähler als der Dividendus, der Nenner als der Divisor und der Bruch selbsten als der Quotient angesehen werden. Was demnach überhaupt von der

Division gilt, mus auch von denen Brüchen gelten.

Aus dieser Ursache wird 1. das was in einer Division übrig bleibt, zum Quotienten in Gestalt eines Bruches gesetzet §. 47. 75. und 2. ein Bruch mit eben dem Zeichen wie die Division ausgedrückt §. 79.

Die Richtigkeit des Lehrsatzes selbsten fält bei einem uneigentlichem Bruche zum ersten in die Augen; z. B. $\frac{20}{4} = 5$, wo offenbar der Zähler 20 der Dividendus, der Nenner 4 der Divisor, und der Bruch selbsten oder sein Wehrt der Quotient ist. Er ist indessen auch bei den eigentlichen Brüchen eben so gewis, indem zur Division keinesweges erfordert wird, daß der Dividendus allezeit grösser sei als der Divisor, folglich denselben etlichemal enthalte, sondern es ist genug, wenn er einige Teile von ihm in sich enthält; und dieses zeiget allezeit der Quotiente an.

Erklärung.

§. 83. Brüche sind **ähnlich**, oder von einer **Benennung**, wenn sie gleiche Nenner haben, aber **unähnlich**, wenn ihre Nenner verschieden sind.

So sind z. B. $\frac{ab}{cd}$ und $\frac{ac}{cd}$, wie auch $\frac{4}{12}$ und $\frac{7}{12}$ ähnliche Brüche, im Gegenteile sind $\frac{a}{bc}$ und $\frac{c}{an}$, wie auch $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ unähnlich.

6. Subtrahiret solches davon; damit aber diese Subtraktion desto bequemer geschehen könne, so verkehret sogleich die Zeichen des gefundenen Produkts §. 71.

7. Dividiret auf diese Art noch ferner den Ueberrest, um die übrige Teile des Quotienten zu bekommen, wobei ihr den Divisor in demienigen Gliede des Dividendus suchet, in welchem ihr ihn findet.

8. Kommen endlich zum Ueberreste Grössen vor, so nicht weiter dividiret werden können, so verbindet sie nur mit dem Divisor durch das Divisionszeichen §. 67.

Z. B. Es sei abcd durch bc zu dividiren, so ist ad der Quotient; ferner 6ab durch 3a giebt 2b, und 4abc durch — a giebt — 4bc zum Quotienten.

Ferner

Divis.	Dividendus	Quot.
a	ab + ac — ad	b + c — d
Prod.	— ab	
	+ ac — ad Rest	
Prod.	— ac	
	— ad Rest	
Prod.	+ ad	
	—	

$$2c \mid 4ac - 6bc + 4cc \mid 2a - 3b + 2c$$
$$-4ac$$
$$-6bc + 4cc$$
$$+6bc$$
$$4cc$$
$$-4cc$$
$$- \; -$$

$$a - b + c \mid aa - bb + 2bc - cc \mid a + b - c$$
$$-aa + ab - ac$$
$$-bb + 2bc - cc + ab - ac$$
$$-ab + bb - bc$$
$$bc - cc - ac$$
$$+ac - bc + cc$$
$$- \; - \; -$$

$$4a - 5c \mid 8aa - 6ac - 5cc + 3bc \mid 2a + c + \frac{3bc}{4a - 5c}$$
$$-8aa + 10ac$$
$$4ac - 5cc + 3bc$$
$$-4ac + 5cc$$
$$3bc$$

Zusatz.

§. 76. 1. Ist ein Glied des Dividendus ganz gleich mit dem Divisor, so wird im Quotienten 1. mit seinem gehörigen Zeichen gesetzet.

2. Hat der Dividendus einen Coefficienten, der Divisor aber keinen, oder vielmehr ist der

der Coefficient des leztern 1, so wird der erstere auch der Coefficient des Quotienten.

3. Hat hingegen der Divisor einen Coefficienten, der Dividendus aber keinen, so wird die Division mit demselben nur in Gestalt eines Bruches angezeiget.

Z. B.

$$-ac \mid abc + bd - ac \mid -b + 1 + \frac{bd}{-ac}$$
$$-abc$$
$$+bd - ac$$
$$+ac$$
$$bd$$

$$a + 1 \mid aa - 5ab + 2a - 5b + 1 \mid a - 5b + 1$$
$$-aa - a$$
$$-5ab + a - 5b + 1$$
$$+5ab + 5b$$
$$a + 1$$
$$-a - 1$$
$$- \quad -$$

$$3c \mid abc \mid \frac{ab}{3} \text{ und } 5a \mid aac - ab \mid \frac{ac}{5} - \frac{b}{5} = \frac{ac - b}{5}.$$

Zusaz.

§. 77. Da in der Multiplikation die Exponenten der Faktoren im Produkte zusammen addiret werden, §. 73. so werden gegenteils in der Division die Exponenten des Divisors

von

von den Exponenten des Dividendus abgezogen. Hieraus folget:

1. Wenn bei einerlei Buchstaben die Exponenten gleich sind, so ist 1 davon der Quotient; so ist $\frac{a^3}{a^3} = 1$.

2. Ist der Exponent des Dividendus grösser als der Exponent des Divisors, so wird der leztere von dem erstern abgezogen, und der Ueberrest wird der Exponent des Quotienten; so ist $\frac{a^5}{a^3} = a^2$ oder $\frac{aaaaa}{aaa} = aa$ und $\frac{a^5 + a^4b}{a^3} = a^2 + ab$.

3. Ist endlich der Exponent des Divisors grösser als des Dividendus, so daß die Division nicht volständig sondern nur zum Teil geschehen kan, und das übrige gewöhnlich angedeutet werden mus, so ziehet die Exponenten von einander ab, und den Ueberrest nehmet zum Exponenten des neuen Divisors. So ist $\frac{a^3b}{a^5} = \frac{aaab}{aaaaa} = \frac{b}{aa} = \frac{b}{a^2}$, und $\frac{ac^2d^3}{bc^3d^5} = \frac{a}{bcd^2}$.

Ferner $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ und $\frac{a^5c^2}{a^7c^4d^3} = \frac{1}{a^2c^2d^3}$.

Z. B. $a^3 - b^2 \mid a^3 - b^2 + a^5 - a^2b^2 \mid 1 + a^2$

$$\begin{array}{r} -a^3 + b^2 \\ \hline a^5 - a^2b^2 \\ -a^5 + a^2b^2 \\ \hline - \quad - \end{array}$$

6. Verkürzet das Produkt, wenn es angehet, nach §. 70.

Da die Buchstaben keinen Rang haben §. 62. so kan man 1. die Faktoren neben und unter einander sezen, wie es iedesmal am bequemsten scheinet. 2. Die einzelne Produkte des Multiplikators haben nicht nöhtig, wie bei den Zahlen unter einander gesezt zu werden §. 40., sondern können sogleich in einer Reihe fort geschrieben werden. 3. Es ist auch vollkommen gleichgültig, in welcher Ordnung sowohl die Glieder der Faktoren als auch des Produkts gesezet werden. 4. Endlich kan hiebei noch bemerket werden, daß da die Exponenten blos in der Absicht gesezet werden, um die häuffige Wiederholung eines Buchstabens zu vermeiden, §. 66. und bei iedesmaliger Multiplicirung durch denselben der Buchstabe noch einmal hätte hinzugesezet werden sollen §. 65., so erhält man den Exponenten des Produkts, wenn die Exponenten beider Faktoren zusammen addiret werden, und daher ist $aaa \times aa = a^3 \times a^2 = aaaaa = a^5$.

Z. B.

$$\left.\begin{array}{l} a - b \\ c - d \end{array}\right\} \text{Faktoren}$$

$ac - bc - ad + bd$ Prod.

$$\begin{array}{l} 3a + 5b \\ 5a - 2c \\ \hline 15a^2 + 25ab - 6ac - 10bc. \end{array}$$

a —

$$\begin{array}{l} a - b + c \\ a - b - c \\ \hline a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc - ac + bc - c^2 \end{array}$$

dieses abgekürzt, giebt $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$

$$\begin{array}{l} a^3 + b \\ a^2 - b^2 \\ \hline a^5 + a^2b - a^3b^2 - b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a^3 + 3b - 1 \\ 5a^2b + 4 \\ \hline 15a^5b + 15a^2b^2 - 5a^2b + 12a^3 + 12b - 4. \end{array}$$

Fünftes Hauptstück.

Von der Division der algebraischen Grössen.

Lehrsatz.

§. 74.

Wenn in der Division der Dividendus und der Divisor gleiche Zeichen haben, so wird der Quotient positiv; haben sie aber verschiedene Zeichen, so wird derselbe negativ; wie in der Multiplikation §. 72.

Beweis. Die Division ist die Auflösung des Produkts in seine Faktoren, der Dividen-

dus ist das Produkt, der Divisor der eine und der Quotient der andere Faktor §. 44. Folglich mus auch in der Division der Quotient eben das Zeichen bekommen, so der gesuchte andere Faktor in der Multiplikation gehabt hat. Ist nun erstens der Dividendus oder das Produkt positiv, so haben beide Faktoren einerlei Zeichen gehabt §. 72., folglich hat in diesem Falle der Divisor +, so bekomt es auch der Quotient, und wird daher positiv; hat derselbe aber —, so mus gleichfals der Quotient — bekommen, folglich negativ werden. Ist ferner zweitens der Dividendus oder das Produkt negativ, so haben beide Faktoren verschiedene Zeichen gehabt §. 72., folglich hat in diesem Falle der Divisor —, so mus der Quotient + bekommen und positiv werden; hat iener aber + so mus der Quotient — bekommen und negativ werden.

In beiden Fällen bekomt daher allezeit der Quotient +, wenn der Dividendus und Divisor einerlei; im Gegenteile bekomt er —, wenn sie verschiedene Zeichen führen.

Es ist also $\frac{+ab}{+a} = +b$, und $\frac{-ab}{-a} = +b$;

Ferner $\frac{ab}{-a} = -b$, und $\frac{-ab}{+a} = -b$.

Auf-

Aufgabe.

§. 75. Algemeine Grössen durch einander zu dividiren.

Auflösung. 1. Setzet den Dividendus und den Divisor nach §. 47. zusammen, und bestimmet gleichfals zur Rechten des erstern den Platz für den Quotienten.

2. Wenn der Divisor und Dividendus nur einfache Grössen sind, oder aus einem Gliede bestehen §. 61. so streichet im Dividendus den Divisor als einen Faktor aus, den übrig bleibenden aber setzet in die Stelle des Quotienten §. 68. und gebet ihm das gehörige Zeichen §. 74. Befinden sich Coefficienten dabei, so dividiret solche gleichfals durch einander, und setzet den Quotienten derselben zu dem Quotienten der Buchstaben.

3. Wenn der Divisor eine einfache Grösse ist, der Dividendus aber aus mehrern Gliedern bestehet, so dividiret nach vorhergehender Art das erste Glied des leztern, durch den erstern, und suchet dazu den Quotienten.

4. Bestehen endlich beide aus mehrern Gliedern, so dividiret das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors auf vorige Art.

5. Multipliciret den gefundenen Quotienten mit dem ganzen Divisor, und setzet das Produkt davon unter dem Dividendus.

6. Subtrahiret solches davon; damit aber diese Subtraktion desto bequemer geschehen könne, so verkehret sogleich die Zeichen des gefundenen Produkts §. 71.

7. Dividiret auf diese Art noch ferner den Ueberrest, um die übrige Teile des Quotienten zu bekommen, wobei ihr den Divisor in demienigen Gliede des Dividendus suchet, in welchem ihr ihn findet.

8. Kommen endlich zum Ueberreste Grössen vor, so nicht weiter dividiret werden können, so verbindet sie nur mit dem Divisor durch das Divisionszeichen §. 67.

Z. B. Es sei abcd durch bc zu dividiren, so ist ad der Quotient; ferner 6ab durch 3a giebt 2b, und 4abc durch — a giebt — 4bc zum Quotienten.

Ferner

Divis.	Dividendus	Quot.
a	$ab + ac - ad$	$b + c - d$
Prod.	$-ab$	
	$+ ac - ad$ Rest	
Prod.	$- ac$	
	$- ad$ Rest	
Prod.	$+ ad$	
	$-$	

$$2c \mid 4ac - 6bc + 4cc \mid 2a - 3b + 2c$$
$$-4ac$$
$$\overline{\quad -6bc + 4cc}$$
$$+6bc$$
$$\overline{\quad 4cc}$$
$$-4cc$$
$$\overline{\quad - \; -}$$

$$a - b + c \mid aa - bb + 2bc - cc \mid a + b - c$$
$$-aa + ab - ac$$
$$\overline{\quad -bb + 2bc - cc + ab - ac}$$
$$-ab + bb - bc$$
$$\overline{\quad bc - cc - ac}$$
$$+ac - bc + cc$$
$$\overline{\quad - \; - \; -}$$

$$4a - 5c \mid 8aa - 6ac - 5cc + 3bc \mid 2a + c + \frac{3bc}{4a - 5c}$$
$$-8aa + 10ac$$
$$\overline{\quad 4ac - 5ee + 3bc}$$
$$-4ac + 5cc$$
$$\overline{\quad 3bc}$$

Zusatz.

§. 76. 1. Ist ein Glied des Dividendus ganz gleich mit dem Divisor, so wird im Quotienten 1. mit seinem gehörigen Zeichen gesetzet.

2. Hat der Dividendus einen Coefficienten, der Divisor aber keinen, oder vielmehr ist

der Coefficient des leztern 1, so wird der erstere auch der Coefficient des Quotienten.

3. Hat hingegen der Divisor einen Coefficienten, der Dividendus aber keinen, so wird die Division mit demselben nur in Gestalt eines Bruches angezeiget.

Z. B.

$$-ac \mid abc + bd - ac \mid -b + 1 + \frac{bd}{-ac}$$
$$-abc$$
$$+bd - ac$$
$$+ac$$
$$bd$$

$$a + 1 \mid aa - 5ab + 2a - 5b + 1 \mid a - 5b + 1$$
$$-aa - a$$
$$-5ab + a - 5b + 1$$
$$+5ab + 5b$$
$$a + 1$$
$$-a - 1$$
$$-\;-$$

$$3c \mid abc \mid \frac{ab}{3} \text{ und } 5a \mid aac - ab \mid \frac{ac}{5} - \frac{b}{5} = \frac{ac - b}{5}.$$

Zusaz.

§. 77. Da in der Multiplikation die Exponenten der Faktoren im Produkte zusammen addiret werden, §. 73. so werden gegenteils in der Division die Exponenten des Divisors von

von den Exponenten des Dividendus abgezogen. Hieraus folget:

1. Wenn bei einerlei Buchstaben die Exponenten gleich sind, so ist 1 davon der Quotient; so ist $\frac{a^3}{a^3} = 1$.

2. Ist der Exponent des Dividendus grösser als der Exponent des Divisors, so wird der leztere von dem erstern abgezogen, und der Ueberrest wird der Exponent des Quotienten; so ist $\frac{a^5}{a^3} = a^2$ oder $\frac{aaaaa}{aaa} = aa$ und $\frac{a^5 + a^4b}{a^3} = a^2 + ab$.

3. Ist endlich der Exponent des Divisors grösser als des Dividendus, so daß die Division nicht volständig sondern nur zum Teil geschehen kan, und das übrige gewöhnlich angedeutet werden mus, so ziehet die Exponenten von einander ab, und den Ueberrest nehmet zum Exponenten des neuen Divisors. So ist $\frac{a^3b}{a^5} = \frac{aaab}{aaaaa} = \frac{b}{aa} = \frac{b}{a^2}$, und $\frac{ac^2d^3}{bc^3d^5} = \frac{a}{bcd^2}$.

Ferner $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$ und $\frac{a^5c^2}{a^7c^4d^3} = \frac{1}{a^2c^2d^3}$.

Z. B.

$$\begin{array}{l|l|l} a^3 - b^2 & a^3 - b^2 + a^5 - a^2b^2 & 1 + a^2 \\ & \underline{-a^3 + b^2} & \\ & \qquad\qquad a^5 - a^2b^2 & \\ & \qquad\qquad \underline{-a^5 + a^2b^2} & \\ & \qquad\qquad - \quad - & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^3 \mid a^5 + a^2b \mid a^2 + \frac{b}{a} \\ \underline{-a^5} \\ \quad a^2b \\ \quad \underline{-a^2b} \\ \quad — \end{array}$$

Zusatz.

§. 78. Obgleich die Buchstaben keinen Rang haben, und man folglich die Glieder des Dividendus und des Divisors in einer Ordnung stellen kan, in welcher man wil, so kan dennoch bisweilen ein Zweifel vorfallen, in welchem Gliede des Dividendus man den iedesmaligen Quotienten suchen müsse. Um dieses zu vermeiden, kan man beide Grössen sowohl den Dividendus als den Divisor nach einerlei Buchstaben ordnen, das ist, man wählet einen in beiden befindlichen Buchstaben, und lässet die Glieder nach der Grösse des Exponenten desselben von der Linken zur Rechten auf einander folgen, wo alsdann die Bestimmung des iedesmaligen Quotienten am leichtesten geschieht.

Z. B. In folgendem Dividendus und Divisor sind die Glieder nach dem Buchstaben a geordnet.

$$2a^2 - 3ab + 4b^2 \mid 2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3$$
$$+ 24b^4 \mid a^2 - 5ab + 6b^2$$
$$- 2a^4 + 3a^3b - 4a^2b^2$$
$$- 10a^3b + 27a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4$$
$$+ 10a^3b - 15a^2b^2 + 20ab^3$$
$$12a^2b^2 - 18ab^3 + 24b^4$$
$$- 12a^2b^2 + 18ab^3 - 24b^4$$
$$- \quad - \quad -$$

Hätte man sie aber nach dem Buchstaben b ordnen wollen, so wären sie folgender Gestalt zu stehen gekommen.

$$4b^2 - 3ab + 2a^2 \mid 24b^4 - 38ab^3 + 31a^2b^2$$
$$- 13a^3b + 2a^4 \mid 6b^2 - 5ab + a^2.$$



Drit-

Dritter Abschnit.
Von den Brüchen.

Erstes Hauptstück.
Von den Brüchen überhaupt.

Erklärung.

§. 79.

Wenn in einer Zahl die Menge der Einheiten wiederum als Teile von einer andern Einheit, oder eines andern Ganzen angesehen werden, so ist es ein Bruch (gebrochene Zahl); wo nicht, so ist es eine ganze Zahl. Dieienige Zahl nun, welche anzeiget, aus wie viel Teilen das Ganze bestehet, ist der Nenner (denominator); dieienige aber, so die Menge der Teile, so in dem Bruche davon genommen werden, andeutet, ist der Zähler (numerator). Je grösser die Menge dieser Teile, oder ie grösser der Zähler ist, bei einerlei Nenner, desto grösser ist der Bruch, und umgekehrt.

Das

Das Zeichen eines Bruches ist wie bei der Division §. 67. ein horizontaler Strich, oberhalb desselben der Zähler, und unterhalb der Nenner gesetzet wird. Wenn z. B. ein Schuh in 12 Zolle oder Teile geteilet wird, und 4 derselben davon genommen werden, so sind 4 Zolle so viel als $\frac{4}{12}$ eines Schuhes.

Erklärung.

§. 80. Wenn in einem Bruche der Zähler kleiner als der Nenner, so ist es ein **eigentlicher** (wahrer) **Bruch**; ist aber das Gegenteil, nehmlich der Zähler dem Nenner gleich, oder auch noch grösser, worin folglich das Ganze enthalten ist, so ist es ein **uneigentlicher Bruch** (fractio spuria).

Z. B. $\frac{3}{4}$ ist ein wahrer, aber $\frac{4}{4} = 1$ und $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ sind uneigentliche Brüche.

Zusatz.

§. 81. Hieraus fliessen demnach zwo Folgerungen:

1. Da in einem uneigentlichem Bruche das Ganze ein oder etlichemal enthalten ist, so werden solche gefunden, oder der Bruch wird **aufgelöset**, wenn der Zähler durch den Nenner dividiret wird; bleibet dabei etwas übrig, so ist solches ein eigentlicher Bruch.

So ist z. B. $\frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$ und

$$\frac{2bc + a}{b} = 2c + \frac{a}{b}.$$

2. Um Ganze in Brüchen vorzustellen, oder in einen uneigentlichen Bruch zu verwandeln, darf man sie nur mit dem gegebenen Nenner multipliciren, um den Zähler des Bruches zu bekommen; befindet sich aber schon ein Bruch dabei, so mus dessen Zähler dazu addiret werden.

So ist z. B. $6\frac{3}{4} = \frac{27}{4}$; $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$,

und $4a + \frac{bx}{2a} = \frac{8aa + bx}{2a}$.

Lehrsatz.

§. 82. Ein Bruch ist ein Quotient des Zählers durch den Nenner.

Beweis. In der Division enthält der Dividendus so viel oder so oft den Divisor als der Quotient die Einheit §. 20. Nun enthält auch der Zähler so oft den Nenner oder so viel von demselben, als der Bruch von der Einheit oder von dem Ganzen, §. 79. folglich kan in iedem Bruche der Zähler als der Dividendus, der Nenner als der Divisor und der Bruch selbsten als der Quotient angesehen werden. Was demnach überhaupt von der

Di-

Division gilt, mus auch von denen Brüchen gelten.

Aus dieser Ursache wird 1. das was in einer Division übrig bleibt, zum Quotienten in Gestalt eines Bruches gesezet §. 47. 75. und 2. ein Bruch mit eben dem Zeichen wie die Division ausgedrückt §. 79.

Die Richtigkeit des Lehrsazes selbsten fält bei einem uneigentlichem Bruche zum ersten in die Augen; z. B. $\frac{20}{4} = 5$, wo offenbar der Zähler 20 der Dividendus, der Nenner 4 der Divisor, und der Bruch selbsten oder sein Wehrt der Quotient ist. Er ist indessen auch bei den eigentlichen Brüchen eben so gewis, indem zur Division keinesweges erfordert wird, daß der Dividendus allezeit grösser sei als der Divisor, folglich denselben etlichemal enthalte, sondern es ist genug, wenn er einige Teile von ihm in sich enthält; und dieses zeiget allezeit der Quotiente an.

Erklärung.

§. 83. **Brüche** sind **ähnlich**, oder **von einer Benennung**, wenn sie gleiche Nenner haben, aber **unähnlich**, wenn ihre Nenner verschieden sind.

So sind z. B. $\frac{ab}{cd}$ und $\frac{ac}{cd}$, wie auch $\frac{4}{12}$ und $\frac{7}{12}$ ähnliche Brüche, im Gegenteile sind $\frac{a}{bc}$ und $\frac{c}{an}$, wie auch [illegible] und [illegible] unähnlich.

Zusatz.

§. 84. Da in einem ieden Bruche etliche Teile von einem Ganzen genommen werden §. 79. so mus bei Beurteilung der Grösse und des Wehrtes desselben sowohl auf die Menge der Teile, folglich auf die Grösse des Zählers, als auch auf die Grösse der Teile in welche das Ganze geteilet wird, das ist, auf den Nenner gesehen werden. Folglich kan ein Bruch auf eine zwiefache Art vergrössert und vermehret werden.

1. Wenn die Menge der Teile vermehret wird, und solche doch für sich einerlei Grösse behalten; folglich wenn der Zähler vermehret wird, der Nenner aber ungeändert bleibet.

2. Wenn zwar die Anzahl der Teile einerlei verbleibet, diese Teile aber vor sich grösser gemacht werden, als sie vorher gewesen, das ist, wenn das Ganze in weniger Teile geteilet wird; folglich wenn der Zähler unverändert gelassen, der Nenner aber vermindert wird.

So ist z. B. nach dem ersten Falle $\frac{5}{21}$ < als $\frac{7}{12}$; und nach dem zweiten $\frac{5}{12}$ < als $\frac{5}{8}$.

Zusatz.

§. 85. Aus eben dem Grunde kan ein Bruch auf eine zwiefache Art vermindert und kleiner gemacht werden.

1. Wenn

1. Wenn weniger Teile genommen werden als vorher, und solche doch in gleicher Grösse verbleiben; folglich wenn der Zähler vermindert, der Nenner aber ungeändert gelassen wird.

2. Wenn zwar die Anzahl der Teile bleibt, solche aber kleiner angenommen werden als vorhero, das ist, wenn das Ganze in mehrere Teile geteilet wird; denn ie mehrere derselben angenommen werden, desto kleiner wird iedes vor sich betrachtet. Dieses geschieht demnach, wenn der Zähler ungeändert gelassen, der Nenner aber vermehret wird.

So ist nach dem ersten Falle $\frac{16}{36} > \frac{13}{36}$ und nach dem zweiten $\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$.

Lehrsatz.

§. 86. Wenn der Zähler und Nenner eines Bruchs durch eine dritte Grösse multipliciret werden, so machen die Produkte einen Bruch, der dem vorigen gleich ist.

Beweis. Denn durch die Multiplikation des Zählers wird der Bruch um eben so viel vermehret §. 84. als er durch die Multiplikation des Nenners vermindert wird, §. 85. Folglich bleibt er ungeändert.

So ist $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8}$ und $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

Ferner $\frac{a+b}{c} = \frac{(a+b)\times(a-b)}{c\times(a-b)} = \frac{a^2-b^2}{ac-bc}$.

Lehrsatz.

§. 87. Wenn der Zähler und Nenner eines Bruchs durch eine dritte Grösse dividiret werden, so machen die Quotienten davon einen Bruch, so dem vorigen gleich ist.

Beweis. Denn durch die Division des Zählers wird der Bruch um eben so viel vermindert §. 85. als er durch die Division des Nenners vermehret wird §. 84. Folglich bleibt er ungeändert.

So ist $\frac{8}{12} = \frac{8:4}{12:4} = \frac{2}{3}$, und

$$\frac{5}{10} = \frac{5:5}{10:5} = \frac{1}{2}.$$

Ferner $\frac{ac+bc}{cc} = \frac{a+b}{c}$ und

$$\frac{4a^2-6ab}{2ac+4ad} = \frac{2a-3b}{c+2d}.$$

Aufgabe.

§. 88. Brüche zu einer Benennung zu bringen, d. i. in andere zu verwandeln, so dem gegebenen gleich und einerlei Nenner haben.

Auflösung. 1. Sind nur zwei Brüche, so multipliciret sowohl den Zähler als auch den Nenner eines ieden Bruches durch den Nenner des andern, so geben die ersten Produkte die Zähler, und die zweiten die Nenner zu den neuen Brüchen.

2. Sind aber mehrere Brüche zu einer Benennung zu bringen, so multipliciret sowohl den Zähler als auch den Nenner eines ieden durch das Produkt der Nenner aller übrigen, so geben wiederum die ersten Produkte die Zähler und die zweiten die Nenner zu den neuen Brüchen.

Beweis. Die Nenner der neuen Brüche sind in beiden Fällen ein Produkt, so aus den einzelnen Nennern der gegebenen Brüche entstanden, und bestehen also aus einerlei Faktoren, und sind daher einander gleich §. 56. folglich sind die Brüche zu einer Benennung gebracht worden. In einem ieden einzelnen Bruche aber ist auch sowohl der Zähler als der Nenner durch eine dritte Grösse multipliciret worden, folglich sind auch die gefundene Brüche denen gegebenen am Wehrte gleich §. 86.

Die beide Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{7}$ geben

$$\frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28} \text{ und } \frac{4 \times 5}{4 \times 7} = \frac{20}{28}.$$

So auch $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gebe $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$.

Ferner die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ und $\frac{3}{9}$ geben

$$\frac{2 \times 5 \times 9}{3 \times 5 \times 9},\ \frac{4 \times 3 \times 9}{3 \times 5 \times 9} \text{ und } \frac{3 \times 3 \times 5}{3 \times 5 \times 9}$$

d. i. $\frac{90}{135}$, $\frac{108}{135}$ und $\frac{45}{135}$.

Oder in Buchstaben: $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ geben

$\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bcf}{bdf}$ und $\frac{bde}{bdf}$.

Aufgabe.

§. 89. Einen Bruch **aufheben** (abkürzen) d. i. demselben ohne Veränderung seines Wehrts einen kleinern Zähler und Nenner geben.

Auflösung. Dividiret sowohl den Zähler als Nenner durch eine dritte Grösse, so daß nichts übrig bleibt, so machen die Quotienten einen neuen Bruch, der dem gegebenen gleich ist §. 87.

Haben beide sowohl Zähler als Nenner keinen andern Faktor als die Zahl 1 mit einander gemein, so läst sich auch der Bruch nicht aufheben. In Buchstaben erhellet der gemeinschaftliche Faktor, folglich auch die Möglichkeit der Aufhebung des Bruches am leichtesten.

Z. B.

$\frac{6}{100} = \frac{3}{50}$; $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$ und $\frac{1111}{8888} = \frac{1}{8}$

$$\frac{aabx}{abc} = \frac{ax}{c} \text{ und}$$

$$\frac{2aa + 6ab - 4ac}{2ac + 2ad} = \frac{a + 3b - 2c}{c + d}.$$

Zusatz.

§. 90. Um diese Aufhebung der Brüche zu erleichtern, können folgende Hülfsmittel dienen.

1. Endet sich sowohl der Zähler als Nenner mit Nullen, so können beiderseits gleich viele Nullen ausgestrichen werden.

Z. B. $\frac{300}{54000} = \frac{3}{540}$.

2. Endet sich der Zähler sowohl als Nenner mit 5, oder auch einer derselben mit 5, der andere aber mit 0, so ist die Zahl 5 von beiden ein gemeinschaftlicher Faktor, und der Bruch kan dadurch aufgehoben werden.

Z. B. $\frac{35}{245} = \frac{7}{49}$ und $\frac{45}{250} = \frac{9}{50}$.

3. So oft sich der Zähler und Nenner mit einer geraden Zahl endiget, so lassen sie sich durch 2 aufheben.

Z. B. $\frac{248}{336} = \frac{124}{168} = \frac{62}{84} = \frac{31}{42}$.

4. Wenn die Summe aller Ziffern des Zählers, und gleichfals die Summe aller Ziffern des Nenners einer von den folgenden Zahlen gleich ist: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, u. s. w. so kan der Bruch durch 3 aufgehoben werden.

Z. B. In dem Bruche $\frac{327}{588}$ ist $3 + 2 + 7 = 12$ und $5 + 8 + 8 = 21$, folglich ist $\frac{327}{588} = \frac{109}{196}$.

Zusatz.

§. 91. Um einen Bruch so weit aufzuheben, oder in so kleinen Zahlen auszudrücken, als möglich, mus man sowohl den Zähler als Nenner desselben durch den grösten gemeinschaftlichen Faktor, so das gröste gemeine Maas derselben genennet wird, dividiren. Da nun derselbe nicht allezeit so gleich in die Augen fält, so kan man ihn folgender gestalt finden.

1. Dividiret die grössere durch die kleinere Zahl; bleibet nichts übrig so ist die kleinere der gesuchte gröste Faktor.

Z. B. $\frac{8}{24} : 8 = \frac{1}{3}$.

2. Bleibet aber etwas übrig, so nehmet den Ueberrest zum neuen Divisor, und den vorigen Divisor zum Dividendus an, und dividiret von neuen; fahret auf diese Art fort

bis

bis nichts übrig bleibt, so ist alsdann der lezte Divisor der gröste gesuchte Faktor, durch den sich der Bruch aufheben läst. Bleibet aber zulezt 1 übrig, so läst sich der Bruch nicht aufheben.

Z. B. Es sei der Bruch $\frac{143}{637}$, so wird er folgendergestalt aufgehoben

```
143 | 637 | 4
      572
       65 | 143 | 2
            130
             13 | 65 | 5
                  65
                  --
```

13 gröster gemeiner Faktor, daher ist $\frac{143}{637} = \frac{11}{49}$.

Zweites Hauptstück.

Von den vier Rechnungsarten mit den Brüchen.

Aufgabe.

§. 92.

Brüche zu einander zu addiren.

Auflösung. 1. Bringet sie zu einer Benennung, wenn sie unähnlich sind §. 88.

2. Ad-

2. Addiret ihre Zähler zusammen, und lasset den Nenner unverändert, weil die Grösse des Bruchs alsdann blos von der Grösse des Zählers abhängt §. 79.

3. Entstehet ein uneigentlicher Bruch daraus, so löset denselben auf nach §. 81.

Die Summe der Brüche $\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{6}$ ist

$$\frac{48 + 36 + 80}{96} = \frac{164}{96} = 1\frac{68}{96} = 1\frac{17}{24}.$$

Sind Ganze bei den Brüchen, so addiret zuerst die Brüche und hernach die Ganzen zusammen.

Z. B. $4\frac{5}{6} + 3\frac{1}{4} + 7\frac{3}{5} = 15\frac{82}{120} = 15\frac{41}{60}$.

So kan auch die Addition mit Buchstaben geschehen. Als

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{x}{y} = \frac{ady + cby + bdx}{bdy}.$$

Aufgabe.

§. 93. Brüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung. 1. Bringet sie zu einer Benennung.

2. Subtrahiret die Zähler von einander, und nehmet ihren Ueberrest zum Zähler des gesuchten Unterschiedes an, dem ihr den vorigen Nenner gebet.

Z. B.

Z. B. $\frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{8 - 5}{10} = \frac{3}{10}$ und

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}.$$

Sol ein Bruch von Ganzen abgezogen werden, so borget bei denselben Eins, und setzet es auf einen gleichnahmigen Bruch, §. 81. so kan die Rechnung geschehen.

So ist $6 - \frac{4}{5} = 5\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = 5\frac{1}{5}$.

Sind Ganze bei beiden Brüchen, so müssen auch diese von einander abgezogen werden.

Z. B. $8\frac{2}{7} - 3\frac{4}{5} = 8\frac{10}{35} - 3\frac{28}{35} =$
$7\frac{45}{35} - 3\frac{28}{35} = 4\frac{17}{35}$.

Aufgabe.

§. 94. Einen Bruch durch eine andere Grösse zu multipliciren.

Auflösung. Multipliciret den Zähler des Bruches durch die gegebene Grösse, und lasset den Nenner ungeändert.

Beweis. Einen Bruch multipliciren heisst ihn so vielmal nehmen, oder ihn so vielmal vergrössern, als der Multiplikator andeutet §. 19. folglich darf nur der Zähler multipliciret, der Nenner aber ungeändert gelassen werden §. 84.

Das

Daher ist z. B. $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ und

$$\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}.$$

Zusatz.

§. 95. 1. Weil es in der Multiplikation einerlei, welchen Faktor man als den Multiplikator oder Multiplikandus annehmen wil, so wird auch auf diese Art eine iede Grösse durch einen Bruch multipliciret, das ist: man multipliciret die gegebene Grösse durch den Zähler und dividiret sie durch den Nenner.

Z. B. $6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$.

2. Wenn sich bei dem Bruche Ganze befinden, so setzet solche auf einen Bruch, und verrichtet die Rechnung wie vorher.

Z. B. $4\frac{3}{5} \times 3 = \frac{23}{5} \times 3 = \frac{69}{5} = 12\frac{4}{5}$.

3. Durch die Multiplikation mit einem eigentlichen Bruche wird das Produkt allezeit kleiner als der andere Faktor war. Denn da das Produkt denselben so oft enthält als der Multiplikator die Einheit §. 19. solcher aber ein Bruch, folglich kleiner als die Einheit ist §. 79. so mus auch das Produkt kleiner werden, als der andere Faktor.

Daher ist z. B. $6 \times \frac{2}{5} = 2\frac{2}{5} < 6$.

Auf-

Aufgabe.

§. 96. Einen Bruch mit einer andern Grösse zu dividiren.

Auflösung. Multipliciret den Nenner des Bruches mit der gegebenen Grösse, und lasset den Zähler unverändert.

Beweis. Einen Bruch dividiren, heist denselben in so viele Teile teilen, und so oft kleiner machen, als die andere gegebene Grösse anzeiget §. 20. Dieses geschiehet aber, wenn der Nenner multipliciret wird §. 85.

Z. B. $\frac{5}{6} : 3 = \frac{5}{18}$ und $\frac{ab}{c} : (a - b) = \frac{ab}{ac - bc}$.

Sind bei dem Bruche Ganze, so kan die Rechnung verrichtet werden, wenn man auch die Ganze auf den Bruch setzet.

Z. B. $20\frac{1}{4} : 6 = \frac{81}{4} : 6 = \frac{81}{24} = 3\frac{3}{8}$.

Ferner $\left(a + \frac{b}{c}\right) : (a - b) =$

$$\left(\frac{ac + b}{c}\right) : (a - b) = \frac{ac + b}{ac - bc}.$$

Aufgabe.

§. 97. Eine gegebene Grösse mit einem Bruche dividiren.

Auflösung. Multipliciret die gegebene Grösse durch den Nenner des Bruches, und

die-

dieses Produkt dividiret durch den Zähler desselben, so ist der gesuchte Quotient gefunden.

Beweis. Es sei a durch $\frac{b}{c}$ zu dividiren, und der gesuchte Quotient sei $= x$. Nun ist in der Division der Dividendus gleich dem Produkte des Divisors in den Quotienten §. 45. folglich ist $a = \frac{b}{c} \times x = \frac{bx}{c}$ §. 94. Wenn man nun beiderseits mit c multipliciret, so bekomt man §. 56. $ac = \frac{bxc}{c} = bx$. Dividiret man nun beiderseits wiederum mit b, so findet man $\frac{ac}{b} = x$ §. 56.

$$\text{d. i. } a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Z. B. $6 : \frac{3}{4} = \frac{24}{3} = 8$ und

$$aa + ab : \left(\frac{2a - b}{c}\right) = \frac{aac + abc}{2a - b}$$

wie auch $a - b : \frac{c}{4} = \frac{4a - 4b}{c}$.

Wenn sich bei dem Divisor Ganze befinden, so setzet sie gleichfals auf einen Bruch.

Z. B. $6 : 4\frac{1}{2} = 6 : \frac{9}{2} = \frac{12}{9} = 1\frac{3}{9} = 1\frac{1}{3}$ und

$$4a + 2bb : \left(2a + \frac{b}{c}\right) =$$

$$4a + 2bb : \left(\frac{2ac + b}{c}\right) = \frac{4ac + 2bbc}{2ac + b}.$$

Aufgabe.

§. 98. Brüche durch einander zu multipliciren.

Auflösung. Multipliciret sowohl die Zähler als auch die Nenner der beiden Faktoren durch einander, so geben ihre Produkte einen neuen Bruch, so das gesuchte Produkt ist.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b}$ mit $\frac{c}{d}$ zu multipliciren. Um nun eine Grösse mit einem Bruche zu multipliciren, so sol solche zuerst durch den Zähler des Multiplikators multipliciret, und hierauf durch den Nenner desselben dividiret werden §. 95. Das erste giebt nun $\frac{ac}{b}$ §. 94. und das andere $\frac{ac}{bd}$ §. 96.

Z. B. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

Zusatz.

§. 99. Befinden sich Ganze bei den Brüchen, so kan die Rechnung auf eine zwiefache Art verrichtet werden.

 1. Wenn

1. Wenn man die Ganze auf Brüche setzet, und

2. Wenn man sowohl die Ganze als auch die Brüche eines ieden Faktors durch einander multipliciret.

Z. B. Es sol $4\frac{1}{2}$ mit $3\frac{2}{3}$ multipliciret werden $4\frac{1}{2} \times 3\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{11}{3} = \frac{99}{6} = 16\frac{1}{2}$. Oder auch $4 \times 3 + 4 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 12 + \frac{8}{3} + \frac{3}{2} + \frac{2}{6} = 16 + \frac{1}{2}$.

Ferner sei $a + \frac{b}{c}$ durch $d + \frac{f}{x}$ zu multipliciren

$$\left(\frac{ac + b}{c}\right) \times \left(\frac{dx + f}{x}\right) =$$

$$\frac{acdx + bdx + acf + bf}{cx}.$$ Oder auch

$$ad + \frac{bd}{c} + \frac{af}{x} + \frac{bf}{cx}.$$

Aufgabe.

§. 100. Brüche durch einander zu dividiren.

Auflösung. Multipliciret zuerst den Zähler des Dividendus durch den Nenner des Divisors, und hierauf den Nenner des ersten durch den Zähler des andern; so giebt das erste Produkt den Zähler und das andere den Nenner eines neuen Bruchs, so der gesuchte Quotiente ist.

Oder: 1. Verkehret den Divisor, und setzet den Nenner in die Stelle des Zählers, und den Zähler in die Stelle des Nenners.

2. Multipliciret hierauf die Zähler und Nenner durch einander, wie in §. 98.

Beweis. Es sei $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ zu dividiren, so sage ich, daß der Quotient sei $= \frac{ad}{bc}$. Denn wenn derselbe mit dem Divisor $\frac{c}{d}$ multipliciret wird, so bekomt man $\frac{acd}{bcd} = \frac{a}{b}$ welches der vorige Dividendus ist. Folglich ist $\frac{ad}{bc}$ der wahre Quotient §. 45.

Z. B. Anstaat $\frac{4}{3} : \frac{3}{4}$ setzet $\frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$.

Zusatz.

§. 101. 1. Sind Ganze bei den Brüchen, so setzet man sie gleichfals vorher auf einen Bruch, und rechnet hernach wie gewöhnlich.

Z. B. $6\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2} = \frac{20}{3} : \frac{5}{2} = \frac{40}{15} = 2\frac{2}{3}$. Ferner

$$\left(a + \frac{b}{c}\right) : \left(b - \frac{d}{f}\right) = \left(\frac{ac + b}{c}\right) : \left(\frac{bf - d}{f}\right) = \frac{acf + bf}{bcf - cd}$$

2. Weil ein Bruch kleiner als die Einheit ist, so kan auch ein Bruch gar wohl etlichemal in einem andern enthalten sein; folglich kan der Quotient aus der Division der Brüche gar wohl aus Ganzen bestehen.

Z. B. $\frac{7}{8} : \frac{1}{4} = \frac{28}{8} = 3\frac{1}{2}$.

3. Haben etwan beide Brüche einerlei Nenner, so komt es blos darauf an, zu finden, wie oft der Zähler des Divisors in den Zähler des Dividendus enthalten ist, weil in diesem Falle die Grösse der Brüche in dem blossen Zähler bestehet §. 79., folglich können sie alsdann auf die gewöhnliche Art wie ganze Zahlen durch einander dividiret werden.

Z. B. $\frac{8}{12} : \frac{3}{12} = 2\frac{2}{3}$.

Aufgabe.

§. 102. Einen gegebenen Bruch in einen andern von gleichem Wehrte zu verwandeln, wozu der Nenner gegeben ist.

Auflösung. Multipliciret den gegebenen Bruch mit dem gegebenen Nenner, so ist das Produkt der gesuchte Zähler; das ist: multipliciret den Zähler mit dem neuen Nenner und das Produkt dividiret mit dem ersten Nenner §. 94.

Be-

Beweis. Es sei der gegebene Bruch $= \frac{a}{b}$ und der neue Nenner $= c$, der unbekante Zähler aber $= x$; so ist $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$; folglich indem man beiderseits mit c multipliciret $\frac{ac}{b} = x$ §. 56.

Es sei z. B. der Bruch $\frac{2}{3}$ in einen andern, dessen Nenner 12 ist, zu verwandeln, so ist $x = \frac{2 \times 12}{3} = \frac{24}{3} = 8$; folglich ist $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$.

Diese Aufgabe wird vornehmlich gebraucht,

1. Wenn man einen Bruch einer benanten Zahl in kleinern Gattungen ausdrücken wil, wo alsdann das Maas dieser benanten Zahl der gegebene Nenner ist.

Z. B. $\frac{4}{5}$ fl. ist $\frac{4 \times 60}{5} = \frac{240}{5}$ fl. oder 48. kr.

2. Wenn man in der Geometrie ein zehnteiliges Maas auf ein zwölfteiliges setzen wil, und umgekehrt; wovon in folgendem Hauptstücke.

Aufgabe.

§. 103. Einen Bruch in einen andern von gleichem Wehrte zu verwandeln, wozu der Zähler gegeben ist.

Auflösung. Dividiret den gegebenen Zähler mit dem gegebenen Bruche, so ist der Quotient der gesuchte Nenner.

Beweis. Es sei der gegebene Bruch $= \frac{a}{b}$, der gegebene Zähler $= c$, und der gesuchte Nenner $= x$, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ folglich $\frac{ax}{b} = c$, und $ax = bc$, also $x = \frac{bc}{a}$ §. 97.

Z. B. Man sol $\frac{3}{5}$ in einen Bruch verwandeln, der zum Zähler 12 habe, so ist $x = 12 : \frac{3}{5} = \frac{60}{3} = 20$, folglich ist $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$.

Drittes Hauptstück.

Von den zehnteiligen Brüchen.

Erklärung.

§. 104.

Ein zehenteiliger Bruch (fractio decimalis) ist ein solcher, bei welchem das Ganze oder die Einheit iedesmal in zehen Teile und diese Teile von neuen als Ganze betrachtet wiederum in keine andere als zehen Tei-

Teile eingeteilet werden, folglich wo der Nenner 10, 100, 1000 u. s. w. ist. In einem zehenteiligen Bruche stimmet dahero das eigentümliche Maas der benanten Zahlen §. 32. mit dem algemeinem Maas der Zahlen überhaupt §. 25. überein.

Wenn in der Geometrie der Schuh in 10 Zollen, der Zoll in 10 Linien, die Linie in 10 Punkten u. s. w. eingeteilet wird, so entstehen daraus eigentlich zehenteilige Brüche eines Schuhes. Ob nun gleich in den wenigsten Fällen dieses Maas würklich im Gebrauche ist, und folglich die Brüche an sich selten zehnteilig zu sein pflegen, so pfleget man sie doch oft darin zu verwandeln, um die grosse in allen Rechnungsarten daraus entstehende Bequemlichkeit und Kürze nützen zu können.

Zusatz.

§. 105. Da in den zehnteiligen Brüchen die Einheiten einerlei sind mit den Einheiten der Zahlen überhaupt, §. 104. die leztern aber aus der blossen Stelle, so die Ziffern einnehmen, erkant werden, §. 28. so können auch die erstern auf eben die Art ausgedrukt und bezeichnet werden, ohne daß es nöhtig sei, den Nenner beizufügen. Nun bedeutet eine Ziffer so einer andern zunächst zur Rechten stehet zehenmal weniger als dieselbe, §. 28. folglich bedeutet auch eine iede Ziffer, so der Einheit unmittelbar zur Rechten stehet, $\frac{1}{10}$ davon, die-

jenige so hierauf folget $\frac{1}{10}$ von der leztern, oder $\frac{1}{100}$ von der erstern, die nächst folgende wiederum $\frac{1}{10}$ von der leztern, folglich $\frac{1}{1000}$ von der Einheit, u. s. w. Daher wird in diesen Brüchen der Nenner gemeiniglich ausgelassen, und nur die Stelle der Einheit oder der Ganzen mit (,) bezeichnet, damit die nachfolgende Ziffern des Bruches oder des Zählers ihren Rang bekommen.

Wäre demnach die Zahl 5,324 gegeben, so bedeutet sie eben so viel als 5 Ganze und $\frac{324}{1000}$, oder auch $5 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{1000}$, und wenn in diesem Falle die Ganzen Schuhe wären, so würde die Zahl bedeuten, 5 Schuh, 3 Zoll, 2 Linien und 4 Punkten, ferner 32,27 ist so viel als $32\frac{27}{100}$.

Auf dieser vorher erklärten Uebereinstimmung der zehnteiligen Brüche mit den ganzen Zahlen bestehet auch die Leichtigkeit der Rechnung mit denselben, indem man sie bei nahe nur als ganze Zahlen ansehen, und auf einerlei Art mit ihnen verfahren darf.

Zusatz.

§. 106. Wären keine Ganze vorhanden, so mus doch die Stelle derselben durch eine Nulle und durch das Zeichen (,) ausgedrücket werden, damit die nachfolgende Ziffern ihren Rang bekommen. Aus eben diesem Grunde mus auch die Stelle der in dem Zähler etwan

man abgehenden vorhergehenden Einheiten durch Nullen ersetzet werden.

Z. B. Wenn man nach dieser Art $\frac{34}{100}$ schreiben wil, so setzet man 0,34; wolte man schreiben $5\frac{7}{1000}$ so setzet 5,007; oder $9\frac{4}{1000} = 9,004$; und $16\frac{32}{10000} = 16,0032$. Endlich anstaat $\frac{5}{10000}$ setzet man 0,0005.

Zusatz.

§. 107. Man siehet auch hieraus, daß der Bruch nicht geändert werde, wenn denen Ziffern zur Rechten noch mehrere Nullen angehänget werden, weil sie dem ohnerachtet ihre Stelle, so von der Einheit gerechnet werden mus, behalten. Daher können also mehrere zehnteilige Brüche gar leicht zu einer Benennung gebracht werden, indem man ihnen nur durch Anhängung einiger Nullen zur Rechten gleich viele Ziffern geben darf.

Z. B. 0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 u. s. w. hätte man demnach die Brüche 0,6 dann 0,42 und 0,261 auf einerlei Benennung zu bringen, so setzet man 0,600 dann 0,420 und 0,261.

Aufgabe.

§. 108. Einen gegebenen Bruch in einen zehnteiligen zu verwandeln.

Auflösung. 1. Multipliciret den Zähler mit dem zehnteiligen Nenner, oder hänget so viel Nullen daran, in so viel Ziffern man den zehnteiligen Bruch finden wil.

2. Dividiret mit dem Nenner des gegebenen Bruches wie gewöhnlich §. 102.

So ist z. B.

$$\tfrac{1}{2} = \frac{1{,}0}{2} = 0{,}5;\ \tfrac{1}{4} = \frac{1{,}00}{4} = 0{,}25; \text{ und}$$

$$\tfrac{24}{32} = \frac{24{,}00}{32} = 0{,}75.$$

Zusatz.

§. 109. Ob gleich nicht ein ieder Bruch sich genau in zehen Teilen ausdrücken lässet, so kan man sich doch durch Anhängung der Nullen seinem wahren Wehrte so weit nähern als man wil, und als man es für nöhtig erachtet, um das übrige ohne merklichen Irtum weglassen zu können.

Z. B. $\tfrac{1}{3} = 0{,}3333\ldots;\ \tfrac{5}{24} = 0{,}20833\ldots$ und $\tfrac{17}{3} = 5{,}6666\ldots$

Aufgabe.

§. 110. Zehnteilige Brüche zu addiren.

Auflösung. 1. Setzet die Zähler, wie in §. 32. unter einander, d. i. eine iede Ziffer in ihre gehörige Stelle von der Einheit gerech-

net

net §. 105. welches eben so viel ist, als ob die Brüche wären zu einer Benennung gebracht worden §. 107.

2. Addiret wie gewöhnlich §. 92. Diejenige Ziffern, so dadurch in die Stelle der Ganzen zu stehen kommen, bedeuten auch Ganze §. 105.

Z. B. Die Summe von 9,0023 + 2,95, + 0,103 wird folgendergestalt erhalten,

9,0023
2,95
0,103
12,0553

Aufgabe.

§. 111. Zehnteilige Brüche von einander zu subtrahiren.

Auflösung. 1. Setzet die Zähler wie in §. 110. unter einander.

2. Subtrahiret wie gewöhnlich §. 93.

Z. B.

29,8572	34,0023	23,0005
8,0031	14,7	0,7856
21,8541	19,3023	22,2149.

Aufgabe.

§. 112. Zehenteilige Brüche durch einander zu multipliciren.

Auf-

Auflösung. 1. Setzet die Zähler nach §. 110. unter einander, und multipliciret wie gewöhnlich.

2. Von dem Produkte schneidet von der Rechten zur Linken so viel Ziffern ab, als beide Faktoren zusammen Decimalen haben; das übrige sind Ganze. Wären aber nicht so viele Ziffern im Produkte vorhanden, so mus ihre Stelle zur Linken durch Nullen ersetzet werden.

Beweis. Bei der Multiplikation der Brüche müssen sowohl Zähler als Nenner durch einander multipliciret werden §. 98. Da nun die Nenner eben so viele Nullen haben, als Decimalen in den Zählern sind, §. 105. und das Produkt der erstern erhalten wird, wenn die Nullen blos zusammen gesetzet werden §. 40. so bestehen auch in dem Produkte der Zähler die Decimalen aus der Summe der Decimalen der Faktoren zusammen genommen.

3. B.

4,65	2,0004	0,0002
3,25	0,79	0,0035
23 25	18 0036	0 0010
930	140 028	00 006
1395	1,58 0316	0,0000 0070
15,11 25		

Wenn man indessen gleich Anfangs die Ziffern der einzelnen Produkte in ihre gehörige Stelle, von

der

der Einheit gerechnet, sețet, damit sie ihren gebührenden Rang bekommen, so hat man nicht nöhtig, in dem Produkte Ziffern abzuschneiden, um die Ganze zu finden, sondern sie bezeichnen sich sogleich von selbsten durch die Stelle, so sie einnehmen. Diesen zu Folge bekommen die vorhergehende Beispiele folgende Gestalt.

4,65	2,0004	0,0002
3,25	0,79	0,0035
13,95	1,40028	0,0000006
0,930	0,180036	0,00000010
0,2325	1,580316	0,00000070
15,1125		

Aufgabe.

§. 113. Zehnteilige Brüche durch einander zu dividiren.

Auflösung. 1. Bringet die Brüche zu einer Benennung nach §. 107.

2. Dividiret wie gewöhnlich die Zähler durch einander §. 101.

3. Den Ueberrest verwandelt in einen zehnteiligen Bruch nach §. 108.

Beweis. Der Grund des Verfahrens erhellet unmittelbar aus §. 101.

Z. B.

```
5,820|16,075|2,762...;   0,625|1,600|2,56
      11,640                    1,250
      ------                    -----
       4,4350                    3500
       40740                     3125
       -----                     ----
        36100                     3750
        34920                     3750
        -----                     ----
         11800                    - -
         11640
         -----
          160

3,642|0,085|0,023...;    3,000|0,042|0,014
      0,0850                   0,0420
        8500                     4200
        7284                     3000
        ----                     -----
        12160                    12000
        10926                    12000
        -----                    -----
         1234                    -- --
```

Aufgabe.

§. 114. Eine benante Zahl nach dem zwölfteiligem Maasse auf ein zehnteiliges zu setzen, und umgekehrt.

Auflösung. 1. Bringet die gegebene Zahl auf die kleineste Einheiten und Teile §. 41. und nehmet das Produkt als den Zähler eines Bruches an.

2. Die Zahl, welche andeutet, wie viel dergleichen kleinere Einheiten und Teile das Ganze nach dem eigentümlichen Maasse dessel-

ben

ben ausmachen, sehet als den Nenner davon an, nach §. 79.

3. Diesen Bruch setzet nach §. 108. 102. auf einen andern von dem verlangten Nenner.

4. Den gefundenen Zähler bringet auf grössere Einheiten nach §. 53.

Z. B. Es wären 5 Schuh, 7 Zoll, 4 Linien und 8 Punkten nach dem zwölfteiligen Maasse auf ein zehnteiliges zu setzen, wobei nur vorausgesetzet wird, daß die Einheit, nehmlich der Schuh beiderseits von einerlei Grösse angenommen werde, so sind die 7 Zoll, 4 Linien 8 Punkten $= \frac{1064}{12 \times 12 \times 12} = \frac{1064}{1728}$ eines Schuhes $= \frac{1064 \times 1000}{1728} = 0{,}615$ nach dem zehnteiligen Maasse.

Wären im Gegenteil 5,43 = 5 Schuh, 4 Zoll, 3 Linien nach dem zehnteiligem Maasse gegeben, so sind die 4 Zoll 3 Linien $= \frac{43}{100}$ eines Schuhes; wenn sie nun auf einen zwölfteiligen Bruch gesetzet werden sollen, so ist der neue Nenner ebenfals in Linien = 144, folglich ist der neue gesuchte Bruch $= \frac{43 \times 144}{100} =$ 5 Zoll, [illegible] Linien 11 Punkten.



Vierter Abschnit.

Von den Potenzen.

Erstes Hauptstück.

Von den Potenzen überhaupt.

Erklärung.

§. 115.

Eine iede Grösse, so nicht als ein Produkt von gleichen Faktoren angesehen wird, ist in ihrer **ersten Potenz** (Dignität). Wird solche mit sich selbst multipliciret, so entstehet die **zwote Potenz** oder das **Quadrat**; wird das Quadrat wieder durch die erste Potenz multipliciret, so entstehet die **dritte Potenz** oder der **Cubus**; wird diese nochmals mit der ersten multipliciret, so entstehet die **vierte Potenz** u. s. f. Es entstehen also die Potenzen bis ins unendliche fort, wenn die lezte derselben wieder durch die erste multipliciret wird.

So ist aa oder a^2 die zwote Potenz oder das Quadrat von a, desgleichen auch a^2b^2 von ab. Die Zahl 64 = 8 × 8 ist die zwote Potenz von 8, und eben diese Zahl 64 = 4 × 4 × 4 ist die dritte Potenz oder der Cubus von 4.

Zusatz.

§. 116. Da der Exponent nach §. 66. eine Zahl ist, so anzeiget, aus wie viel gleichen Faktoren ein Produkt bestehet, so zeiget sie auch zugleich dieienige Potenz an, zu welcher eine Grösse erhoben worden, oder den **Grad** derselben; und daher wird sie auch der **Exponent der Dignität** genennet.

Daher z. B. bedeutet a oder a^1 die erste, a^2 die zwote, a^3 die dritte Potenz, u. s. w.

Zusatz.

§. 117. 1. Wenn die erste Potenz aus zween oder mehrern Faktoren bestehet, so mus bei den übrigen der Exponent über ieden Faktor insbesondere gesetzet werden.

Daher ist die dritte Potenz von ab nicht ab^3 sondern a^3b^3.

2. Wenn die Erhebung einer zusammengesetzten Grösse zu einer gewissen Potenz nicht würklich geschehen, sondern nur angedeutet wer-

den sol, so schliesset man sie entweder in eine Parenthesis, oder ziehet einen horizontalen Strich darüber, und setzet den Exponenten der gehörigen Potenz zur Rechten darneben.

Z. B. Um die zwote Potenz von $a + b$ anzudeuten, schreibet man $(a + b)^2$ oder auch $\overline{a + b}^2$.

Zusatz.

§. 118. Um eine Grösse zu einer gegebenen Potenz zu erheben, darf man nur die erste Potenz mit sich selbst multipliciren, um die zwote zu bekommen; multipliciret man diese wieder durch die erste, so bekomt man die dritte; welches so oft fortgesetzet wird, als der Exponent der Dignität anzeiget. Ist die gegebene Grösse ein Bruch, so wird sowohl der Zähler als Nenner zu der verlangten Potenz erhoben §. 98.

Es ist demnach die dritte Potenz von $\frac{ab}{c} = \frac{a^3b^3}{c^3}$ und von $\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Erklärung.

§. 119. Die erste Potenz, oder diejenige Grösse aus welcher eine gegebene Potenz entstanden, heist die **Wurzel** davon (radix, Stamgrösse), und wird nach demjenigen Grade benennet, den die Potenz selbsten besitzet. Daher heist die **Quadratwurzel** oder

die

die Wurzel der zwoten Potenz dieienige Grösse, aus deren Multiplikation durch sich selbst das Quadrat entstanden; die Cubikwurzel, oder die Wurzel der dritten Potenz dieienige Grösse, aus deren Multiplikation mit ihrem Quadrate die dritte Potenz entstanden §. 115. u. s. f.

So ist z. B. ab die Cubikwurzel von a^3b^3. Die Zahl 4 ist die Quadratwurzel von 16, die Cubikwurzel von 64, die Wurzel der vierten Potenz von 256, u. s. w.

Erklärung.

§. 120. Die **Wurzel** aus einer gegebenen Potenz **ausziehen** heist, dieienige Wurzel finden, welche die gegebene Potenz hervorgebracht hat. Kan oder sol diese Ausziehung nicht würklich geschehen, sondern nur angedeutet werden, so bedienet man sich des **Wurzelzeichens** $\sqrt{}$ welches vor der gegebenen Grösse, aus welcher die Ausziehung geschehen solte, gesetzet und der Exponent der zugehörigen Potenz darüber geschrieben wird; welcher alsdann auch der **Exponent der Wurzel** genennet wird. Bei Ausziehung der Quadratwurzel wird dieser Exponent auch ausgelassen.

Z. B. $\sqrt[3]{ab^3}$ bedeutet, daß aus ab^3 die Cubikwurzel gezogen werden solle, und $\sqrt{ab} = \sqrt[2]{ab}$ daß aus ab die Quadratwurzel zu ziehen sei.

Ist aber die Wurzel aus einer zusammengesezten Grösse zu ziehen, so schliesset man sie entweder in eine Parenthesis ein, mit Vorsetzung des Wurzelzeichens, oder man ziehet einen horizontalen Strich darüber, der so weit reichet, als die Ausziehung der Wurzel sich erstrecken sol.

Z. B. $\sqrt[2]{aa + bc^3}$ oder auch $\sqrt[2]{}(aa + bc^3)$ bedeutet, daß aus $aa + bc^3$ die Quadratwurzel ausgezogen werden solle.

Erklärung.

§. 121. Wenn die erste Potenz oder die Wurzel nur eine einfache Grösse ist, §. 61. oder in Zahlen nur aus blossen Einheiten bestehet, so heist sie **einnamigte** (mononomische) **Wurzel.** Bestehet sie aber aus mehreren Gliedern, und in Zahlen nicht aus blossen Einheiten, so ist sie **vielnamigt** (polynomisch); und wird nach der Anzahl ihrer Glieder **zweinamigt, dreinamigt, viernamigt** u. s. w. genennet §. 61.

Z. B. a ist eine mononomische Wurzel, wie auch alle Einheiten von 1 bis auf 9.

$a + b$ aber ist binomisch, wie die Zahl 23 oder $20 + 3$.

$a + b - y$ und die Zahl $423 = 400 + 20 + 3$ sind trinomisch.

Er=

Erklärung.

§. 122. Wenn aus einer verneinenden Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist, eine Wurzel zu ziehen verlangt wird, so heist sie eine **unmögliche Wurzel** (radix imaginaria). Denn weil das Produkt nicht nur zweyer beiahenden, sondern auch zweyer verneinenden Faktoren allezeit beiahend ist, §. 72. so folget daraus:

1. Daß eine iede Potenz, deren Exponent eine gerade Zahl ist, beiahend sein müsse, die Wurzel möge beiahend oder verneinend sein; ist demnach eine solche Potenz verneinend, so ist keine Wurzel möglich, aus deren Multiplikation durch sich selbst sie hätte entstehen können.

2. Die Dignitäten, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, haben mit ihren Wurzeln einerlei Zeichen; und

3. Alle Dignitäten von geraden Exponenten haben doppelte Wurzeln, eine beiahende und eine verneinende, so alle beide wahr und möglich sind; diese leztern pflegt man deswegen mit dem doppelten Zeichen $\pm$ anzudeuten.

Zu Erläuterung dieser Säze betrachtet man, daß die Dignitäten von $+ a$ und $- a$ in folgender Ordnung aus einander entspringen.

$+ a^1$	$- a^1$
$+ a^2$	$+ a^2$
$+ a^3$	$- a^3$
$+ a^4$ u. s. w.	$+ a^4$ u. s. w.

Daher ist $\sqrt[2]{-a^2}$ eine unmögliche Wurzel, weil sowohl $+a$ als $-a$ zum Quadrate $+a^2$ hervor bringet. Ferner $\sqrt[3]{-a^3} = -a$. Besonders aber ist der lezte Saz zu merken. $\sqrt[2]{a^2}$ ist sowohl $+a$ als $-a$, und man drückt sie durch $\pm a$ aus. Welche von beiden Wurzeln demnach in iedem gegebenem Falle anzunehmen, mus aus den übrigen Bestimmungen erhellen.

Erklärung.

§. 123. Eine Potenz ist **volkommen**, und hat eine **ausdrükliche** (rationale) **Wurzel**, wenn die Wurzel von dem gegebenen Exponenten genau daraus gezogen werden kan. Ist aber das Gegenteil, so ist die Potenz **unvolkommen**, und ihre Wurzel ist **unausdrüklich** (irrational, irrationale Grösse).

So sind a^3 und die Zahl 8 volkommene Potenzen und insbesondere Cubi, weil ihre Wurzeln a und 2 sich ausdrücken lassen, oder rational sind. Irrationalgrössen aber lassen sich weder durch Einheiten noch durch Teile der Einheit oder durch Brüche richtig ausdrücken, ob sie gleich wahrhafte und würkliche Grössen sind, wovon wir in der Geometrie verschiedene Beispiele haben werden.

So ist $\sqrt{ab^2}$ irrational, ferner $\sqrt{6}$, weil weder das Quadrat von 2 noch von 3 die Zahl 6 hervorbringet, und durch einen Bruch lasset sich die Wurzel gleichfals nicht ausdrücken, weil durch die

Mul-

Multiplikation eines Bruches durch sich selbst nie eine ganze Zahl entstehen kan. Es kan aber eine Grösse in Absicht auf verschiedene Dignitäten rational und irrational zugleich sein, so ist z. B. $\sqrt[3]{8}$ eine Rationalzahl, aber $\sqrt[2]{8}$ ist irrational.

Aufgabe.

§. 124. Die einfachen Rechnungsarten mit den Potenzen zu verrichten.

Auflösung. 1. Die Addition und Subtraktion derselben geschiehet nach §. 70. und 71.

2. Bei der Multiplikation der Potenzen von einerlei Wurzel oder Buchstaben, addiret die Exponenten derselben zu einander §. 73. Und gegenteils

3. Bei der Division derselben subtrahiret den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividendus §. 77.

So ist z. B.

1. Die Summe von a^2 und $a^3 = a^3 + a^2$ und von $4a^3 + 2a^3 = 6a^3$.

2. Der Unterschied zwischen a^3 und a^2 ist $a^3 - a^2$, und von $4a^3 - 2a^3 = 2a^3$.

3. Das Produkt von $a^3 \times b^2 = a^3b^2$ und von $a^m \times x^n = a^m x^n$. Ferner $y^m \times y^n = y^{m+n}$ und $y^n \times y^n = y^{2n}$.

4. Der Quotient von $a^m : x^r = \frac{a^m}{x^r}$.

$$a^5 : a^3 = a^2.$$

$$\frac{y^m}{y^n} = y^{m-n}.$$

$$\frac{x^{m+n}}{x^n} = x^m.$$

$$\frac{y^n}{y} = y^{n-1}.$$

Daher ist auch $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1$ und überhaupt ist $x^0 = 1$.

Zusatz.

§. 125. Wenn der Exponent des Divisors grösser ist, als der Exponent des Dividendus, so wird der Exponent des Quotienten verneinend, und $\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} = a^{-4}$. Nun aber ist auch $\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}$ §. 77. folglich sind Potenzen mit verneinenden Exponenten so viel als Brüche, und beide Ausdrücke sind gleichgültig, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Hieraus folget demnach auch, daß $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$ und $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}$.

Auf-

Aufgabe.

§. 126. Eine gegebene Potenz einer einnamigten Wurzel zu einer andern gegebenen zu erheben.

Auflösung. Um die gegebene Potenz zu der verlangten zu erheben, mus man sie so oft durch sich selbst multipliciren §. 115. 118. folglich ihren Exponenten so oft zu sich selbst addiren §. 124., oder so vielmal nehmen, als der neue Exponent anzeiget, das ist, man mus die Exponenten durch einander multipliciren §. 19.

So ist $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$ und überhaupt $(x^m)^n = x^{mn}$. $\overline{a^2c^3}^3 = a^6c^9$.

Aufgabe.

§. 127. Aus einer gegebenen Potenz einer einnamigten Grösse eine verlangte Wurzel zu ziehen.

Auflösung. 1. Ist der Exponent der gegebenen Potenz einerlei mit dem Exponenten der verlangten Wurzel, so sind die Buchstaben die Wurzel selbsten.

Z. B. $\sqrt[2]{a^2} = a$. $\sqrt[3]{a^3} = a$. $\sqrt[3]{a^3b^3} = ab$.

2. Sind aber die Exponenten verschieden, so mus der Exponent der gegebenen Potenz

 durch

durch den Exponenten der verlangten Wurzel dividiret werden. Denn da die Erhebung zu einer verlangten Dignität durch die Multiplikation der Exponenten geschieht §. 126. so mus auch umgekehrt die Ausziehung der Wurzel durch die Division derselben geschehen. Woraus dann auch folget, daß die Ausziehung einer Wurzel aus einer Potenz angedeutet werden könne, wenn der Exponent der Potenz in einen Bruch verwandelt wird, dessen Nenner der Exponent der Wurzel ist.

Z. B. $\sqrt[2]{a^4} = a^{4:2} = a^2$. $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{12:4} = a^3$. $\sqrt[3]{a^6c^9} = a^{6:3}c^{9:3} = a^2c^3$. $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ oder $x^{\frac{n}{m}}$. $\sqrt[2]{a} = a^{1:2} = a^{\frac{1}{2}}$.

Zweites Hauptstück.

Von Ausziehung der Wurzeln.

Lehrsatz.

§. 128.

Das Quadrat einer zwonamigten Wurzel bestehet 1. aus den einzelnen Quadraten des ersten und andern Teils, und 2. aus dem

dop-

doppelten Produkte des ersten Teils in den andern.

Beweis. Es sei die Wurzel a + b, so ist das Quadrat davon $a^2 + 2ab + b^2$.

Oder in Zahlen sei die Wurzel 23 = 20 + 3, so ist das Quadrat 400 + 2 (60) + 9 = 529.

Zusatz.

§. 129. Auf eben diese Art bestehet das Quadrat einer dreinamigten Wurzel: 1. aus dem Quadrate eines jeden Teils insbesondere, 2. aus einem doppelten Produkte des ersten Teils in den andern, und 3. aus einem doppelten Produkte des ersten und andern Teils in den dritten. Denn wenn die Wurzel = a + b + c, so ist das Quadrat = $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$. Nun ist $2ac + 2bc = 2(a + b)c$, also ist das ganze Quadrat $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$. Ueberhaupt kan man sagen, daß das Quadrat einer jeden vielnamigten Wurzel bestehen müsse 1. aus den Quadraten eines jeden Teils insbesondere, und 2. aus einem doppelten Produkte aller vorhergehenden Teile in alle nachfolgende.

Zusatz.

§. 130. Wenn man alle vordere Teile einer vielnamigten Wurzel zusammen genommen

nur

nur als einen und den ersten, den lezten aber als den zweiten Teil ansiehet, so kan eine iede vielnamigte Wurzel als zweinamigt betrachtet werden. Und alsdann wird der Lehrsatz §. 128. ein algemeiner **Ausdruck** (formula) für die Quadrate von allen vielnamigten Wurzeln.

Es sei z. B. die Wurzel $a + b + c + d$, so nehme man $a + b + c$ zusammen für den ersten und d für den zweiten Teil an, so ist das Quadrat $= \overline{a + b + c}^2 + 2(a+b+c)d + d^2$.

Aufgabe.

§. 131. Aus einem volkommenen algebraischen Quadrat die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. 1. Suchet die Quadratwurzel des ersten Teils nach §. 127. und setzet sie wie bei der Division in die Stelle des Quotienten, das Quadrat davon aber ziehet von dem gegebenen Quadrate ab.

2. Dupliret den gefundenen ersten Teil der Wurzel, und dividiret damit den Ueberrest, so bekomt ihr den andern Teil §. 128. welchen ihr zu dem vorigen setzet.

3. Multipliciret den gefundenen zweiten Teil mit dem doppelten ersten, addiret dazu das Quadrat des andern Teils, und subtrahiret diese Summe von dem vorigen Ueberreste §. 128.

4. Hat

4. Hat die Wurzel noch mehrere Teile, so sehet die bereits gefundene zusammen genommen von neuen als den ersten Teil an §. 130., dupliret sie, und dividiret wie vorhero damit den Ueberrest, so bekomt ihr den dritten Teil.

5. Setzet die Rechnung auf die vorhergehende Art fort, so bekomt ihr nach und nach alle Teile der Wurzel, und das Quadrat ist in seine einzelne Produkte aufgelöset worden §. 129..

Z. B. Es sei das Quadrat $a^2 - 2ac + c^2$.

Wurzel

$a^2 - 2ac + c^2 \mid a - c$

Subtr. □. d. 1. Teils a^2

Divisor $2a \mid -2ac + c^2$

Subtrah. $-2ac + c^2$

$--$

Wurzel

Oder $a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2 \mid a - b + c$

a^2

Div. $2a) -2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$

Prod. $-2ab + b^2$

Divis. $2a - 2b) + 2ac - 2bc + c^2$

Prod. $+ 2ac - 2bc + c^2$

$---$

Auf

Auf diese Art ist von $\frac{4}{25} - \frac{ab}{5} + \frac{a^2b^2}{16}$ die Wurzel $= \frac{2}{5} - \frac{ab}{4}$ oder auch $\frac{ab}{4} - \frac{2}{5}$. Und von $\frac{4}{9} + \frac{4a}{15} + \frac{a^2}{25} - \frac{8b}{3} - \frac{4ab}{5} + 4b^2$ ist die Quadratwurzel $= \frac{2}{3} + \frac{a}{5} - 2b$.

Zusatz.

§. 132. Verbleibet bei dieser Auszziehung ein Ueberrest, mit welchem die Rechnung nicht weiter fortgesetzet werden kan, so ist es ein Zeichen, daß das Quadrat unvolkommen sei, und die Wurzel davon irrational sei §. 123.

Man darf also nicht glauben, daß man diesen Ueberrest mit dem Wurzelzeichen zu den bereits gefundenen Teilen der Wurzel setzen könne, so wie man in der Division den Ueberrest mit dem Divisionszeichen zum Quotienten setzet.

Z. B: Von $a^2 + bc$ ist nicht die Wurzel $a + \sqrt{bc}$, denn es gehet alsdann das doppelte Produkt des ersten Teil in den andern ab; folglich kan die Wurzel nicht anders ausgedrückt werden als durch $\sqrt{a^2 + bc}$.

§. 133. Die Auszziehung der Quadratwurzel in Zahlen geschiehet auf eben diese Art durch

durch Zerlegung des Quadrats in alle seine einzelne Produkte, wobei es sehr dienlich ist, in iedem Falle die algemeine Formul §. 182. 130. $a^2 + 2ab + b^2$ vor Augen zu haben. Da man auch dabei die Quadrate der neun Einheiten oder einnamigten Wurzeln zu wissen nöhtig hat, so sind solche in folgender Tabelle enthalten.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81

§. 184. Vermöge dem zehnteiligen Maasse der Zahlen bestehet das Quadrat der Einheiten aus 1 oder 2 Ziffern, das Quadrat von Zehenern aus 3 oder 4 Ziffern, das Quadrat der Hunderte aus 5 oder 6 Ziffern, u. s. w. Ueberhaupt enthält das Quadrat nicht mehr als doppelt so viel Ziffern, als aus welchen die Wurzel bestehet.

So ist z. B.

$1^2 = 1$ und $9^2 = 81$

$10^2 = 100$ $99^2 = 9801$

$100^2 = 10000$ $999^2 = 998001$

$1000^2 = 1000000$ $9999^2 = 99980001$

Hieraus folget dann: 1. Daß man bei einem ieden gegebenen Quadrate in Zahlen so gleich erkennen könne, aus wie viel Teilen die Wurzel bestehe, wenn man die halbe Anzahl

Daher ist $\sqrt[2]{-a^2}$ eine unmögliche Wurzel, weil sowohl + a als — a zum Quadrate + a^2 hervor bringet. Ferner $\sqrt[3]{-a^3} = -a$. Besonders aber ist der lezte Saz zu merken. $\sqrt[2]{a^2}$ ist sowohl + a als — a, und man drückt sie durch $\pm a$ aus. Welche von beiden Wurzeln demnach in iedem gegebenem Falle anzunehmen, mus aus den übrigen Bestimmungen erhellen.

Erklärung.

§. 123. Eine Potenz ist **volkommen**, und hat eine **ausdrükliche** (rationale) **Wurzel**, wenn die Wurzel von dem gegebenen Exponenten genau daraus gezogen werden kan. Ist aber das Gegenteil, so ist die Potenz **unvolkommen**, und ihre Wurzel ist **unausdrüklich** (irrational, irrationale Grösse).

So sind a^3 und die Zahl 8 volkommene Potenzen und insbesondere Cubi, weil ihre Wurzeln a und 2 sich ausdrücken lassen, oder rational sind. Irrationalgrössen aber lassen sich weder durch Einheiten noch durch Teile der Einheit oder durch Brüche richtig ausdrücken, ob sie gleich wahrhafte und würkliche Grössen sind, wovon wir in der Geometrie verschiedene Beispiele haben werden.

So ist $\sqrt{ab^2}$ irrational, ferner $\sqrt{6}$, weil weder das Quadrat von 2 noch von 3 die Zahl 6 hervorbringet, und durch einen Bruch lasset sich die Wurzel gleichfals nicht ausdrücken, weil durch die

Mul=

Multiplikation eines Bruches durch sich selbst nie eine ganze Zahl entstehen kan. Es kan aber eine Grösse in Absicht auf verschiedene Dignitäten rational und irrational zugleich sein, so ist z. B. $\sqrt[3]{8}$ eine Rationalzahl, aber $\sqrt[2]{8}$ ist irrational.

Aufgabe.

§. 124. Die einfachen Rechnungsarten mit den Potenzen zu verrichten.

Auflösung. 1. Die Addition und Subtraktion derselben geschiehet nach §. 70. und 71.

2. Bei der Multiplikation der Potenzen von einerlei Wurzel oder Buchstaben addiret die Exponenten derselben zu einander §. 73. Und gegenteils

3. Bei der Division derselben subtrahiret den Exponenten des Divisors von dem Exponenten des Dividendus §. 77.

So ist z. B.

1. Die Summe von a^2 und $a^3 = a^3 + a^2$ und von $4a^3 + 2a^3 = 6a^3$.

2. Der Unterschied zwischen a^3 und a^2 ist $a^3 - a^2$, und von $4a^3 - 2a^3 = 2a^3$.

3. Das Produkt von $a^3 \times b^4 = a^3b^4$ und von $a^m \times x^n = a^mx^n$. Ferner $y^m \times y^n = y^{m+n}$ und $y^n \times y^n = y^{2n}$.

4. Der Quotient von $a^m : x^r = \frac{a^m}{x^r}$.

$$a^5 : a^3 = a^2.$$

$$\frac{y^m}{y^n} = y^{m-n}.$$

$$\frac{x^{m+n}}{x^n} = x^m.$$

$$\frac{y^n}{y} = y^{n-1}.$$

Daher ist auch $\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1$ und überhaupt ist $x^0 = 1$.

Zusatz.

§. 125. Wenn der Exponent des Divisors grösser ist, als der Exponent des Dividendus, so wird der Exponent des Quotienten verneinend, und $\frac{a^3}{a^7} = a^{3-7} = a^{-4}$. Nun aber ist auch $\frac{a^3}{a^7} = \frac{1}{a^4}$ §. 77. folglich sind Potenzen mit verneinenden Exponenten so viel als Brüche, und beide Ausdrücke sind gleichgültig, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Hieraus folget demnach auch, daß $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$ und $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}$.

Auf-

Aufgabe.

§. 126. Eine gegebene Potenz einer einnamigten Wurzel zu einer andern gegebenen zu erheben.

Auflösung. Um die gegebene Potenz zu der verlangten zu erheben, mus man sie so oft durch sich selbst multipliciren §. 115. 118. folglich ihren Exponenten so oft zu sich selbst addiren §. 124., oder so vielmal nehmen, als der neue Exponent anzeiget, das ist, man mus die Exponenten durch einander multipliciren §. 19.

So ist $(a^2)^3 = a^{2\times 3} = a^6$ und überhaupt $(x^m)^n = x^{mn}$. $\overline{a^2c^3}^3 = a^6c^9$.

Aufgabe.

§. 127. Aus einer gegebenen Potenz einer einnamigten Grösse eine verlangte Wurzel zu ziehen.

Auflösung. 1. Ist der Exponent der gegebenen Potenz einerlei mit dem Exponenten der verlangten Wurzel, so sind die Buchstaben die Wurzel selbsten.

Z. B. $\sqrt[2]{a^2} = a$. $\sqrt[3]{a^3} = a$. $\sqrt[3]{a^3b^3} = ab$.

2. Sind aber die Exponenten verschieden, so mus der Exponent der gegebenen Potenz

durch den Exponenten der verlangten Wurzel dividiret werden. Denn da die Erhebung zu einer verlangten Dignität durch die Multiplikation der Exponenten geschieht §. 126. so mus auch umgekehrt die Ausziehung der Wurzel durch die Division derselben geschehen. Woraus dann auch folget, daß die Ausziehung einer Wurzel aus einer Potenz angedeutet werden könne, wenn der Exponent der Potenz in einen Bruch verwandelt wird, dessen Nenner der Exponent der Wurzel ist.

Z. B. $\sqrt[2]{a^4} = a^{4:2} = a^2$. $\sqrt[4]{a^{12}} = a^{12:4} = a^3$. $\sqrt[3]{a^6c^9} = a^{6:3}c^{9:3} = a^2c^3$. $\sqrt[m]{x^n} = x^{n:m}$ oder $x^{\frac{n}{m}}$. $\sqrt[2]{a} = a^{1:2} = a^{\frac{1}{2}}$.

Zweites Hauptstück.

Von Ausziehung der Wurzeln.

Lehrsatz.

§. 128.

Das Quadrat einer zwonamigten Wurzel bestehet 1. aus den einzelnen Quadraten des ersten und andern Teils, und 2. aus dem dop-

doppelten Produkte des ersten Teils in den andern.

Beweis. Es sei die Wurzel $a + b$, so ist das Quadrat davon $a^2 + 2ab + b^2$.

Oder in Zahlen sei die Wurzel $23 = 20 + 3$, so ist das Quadrat $400 + 2(60) + 9 = 529$.

Zusatz.

§. 129. Auf eben diese Art bestehet das Quadrat einer dreinamigten Wurzel: 1. aus dem Quadrate eines ieden Teils insbesondere, 2. aus einem doppelten Produkte des ersten Teils in den andern, und 3. aus einem doppelten Produkte des ersten und andern Teils in den dritten. Denn wenn die Wurzel $= a + b + c$, so ist das Quadrat $= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$. Nun ist $2ac + 2bc = 2(a + b)c$, also ist das ganze Quadrat $a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$. Ueberhaupt kan man sagen, daß das Quadrat einer ieden vielnamigten Wurzel bestehen müsse 1. aus den Quadraten eines ieden Teils insbesondere, und 2. aus einem doppelten Produkte aller vorhergehenden Teile in alle nachfolgende.

Zusatz.

§. 130. Wenn man alle vordere Teile einer vielnamigten Wurzel zusammen genommen

nur

nur als einen und den ersten, den lezten aber als den zweiten Teil ansiehet, so kan eine iede vielnamigte Wurzel als zweinamigt betrachtet werden. Und alsdann wird der Lehrsatz §. 128. ein algemeiner **Ausdruck** (formula) für die Quadrate von allen vielnamigten Wurzeln.

Es sei z. B. die Wurzel $a + b + c + d$, so nehme man $a + b + c$ zusammen für den ersten und d für den zweiten Teil an, so ist das Quadrat $= \overline{a + b + c}^2 + 2(a + b + c)d + d^2$.

Aufgabe.

§. 131. Aus einem volkommenen algebraischen Quadrat die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. 1. Suchet die Quadratwurzel des ersten Teils nach §. 127. und sezet sie wie bei der Division in die Stelle des Quotienten, das Quadrat davon aber ziehet von dem gegebenen Quadrate ab.

2. Dupliret den gefundenen ersten Teil der Wurzel, und dividiret damit den Ueberrest, so bekomt ihr den andern Teil §. 128. welchen ihr zu dem vorigen sezet.

3. Multipliciret den gefundenen zweiten Teil mit dem doppelten ersten, addiret dazu das Quadrat des andern Teils, und subtrahiret diese Summe von dem vorigen Ueberreste §. 128.

4. Hat

4. Hat die Wurzel noch mehrere Teile, so sehet die bereits gefundene zusammen genommen von neuen als den ersten Teil an §. 130., dupliret sie, und dividiret wie vorhero damit den Ueberrest, so bekomt ihr den dritten Teil.

5. Setzet die Rechnung auf die vorhergehende Art fort, so bekomt ihr nach und nach alle Teile der Wurzel, und das Quadrat ist in seine einzelne Produkte aufgelöset worden §. 129..

Z. B. Es sei das Quadrat $a^2 - 2ac + c^2$.

Wurzel

$a^2 - 2ac + c^2 \mid a - c$

Subtr. □. d. 1. Teils a^2

Divisor $2a \mid -2ac + c^2$

Subtrah. $-2ac + c^2$

— —

Wurzel

Oder $a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2 \mid a - b + c$

a^2

Div. $2a) - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2$

Prod. $-2ab + b^2$

Divis. $2a - 2b) + 2ac - 2bc + c^2$

Prod. $+ 2ac - 2bc + c^2$

— — —

Auf

Auf diese Art ist von $\frac{4}{25} - \frac{ab}{5} + \frac{a^2b^2}{16}$ die Wurzel $= \frac{2}{5} - \frac{ab}{4}$ oder auch $\frac{ab}{4} - \frac{2}{5}$. Und von $\frac{4}{9} + \frac{4a}{15} + \frac{a^2}{25} - \frac{8b}{3} - \frac{4ab}{5} + 4b^2$ ist die Quadratwurzel $= \frac{2}{3} + \frac{a}{5} - 2b$.

Zusatz.

§. 132. Verbleibet bei dieser Auszziehung ein Ueberrest, mit welchem die Rechnung nicht weiter fortgesetzet werden kan, so ist es ein Zeichen, daß das Quadrat unvolkommen sei, und die Wurzel davon irrational sei §. 123.

Man darf also nicht glauben, daß man diesen Ueberrest mit dem Wurzelzeichen zu den bereits gefundenen Teilen der Wurzel setzen könne, so wie man in der Division den Ueberrest mit dem Divisionszeichen zum Quotienten setzet.

Z. B. Von $a^2 + bc$ ist nicht die Wurzel $a + \sqrt{bc}$, denn es gehet alsdann das doppelte Produkt des ersten Teil in den andern ab; folglich kan die Wurzel nicht anders ausgedrückt werden als durch $\sqrt{a^2 + bc}$.

§. 133. Die Auszziehung der Quadratwurzel in Zahlen geschiehet auf eben diese Art

durch

durch Zerlegung des Quadrats in alle seine einzelne Produkte, wobei es sehr dienlich ist, in iedem Falle die algemeine Formul §. 182. 130. $a^2 + 2ab + b^2$ vor Augen zu haben. Da man auch dabei die Quadrate der neun Einheiten oder einnamigten Wurzeln zu wissen nöhtig hat, so sind solche in folgender Tabelle enthalten.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81

§. 184. Vermöge dem zehnteiligen Maasse der Zahlen bestehet das Quadrat der Einheiten aus 1 oder 2 Ziffern, das Quadrat von Zehenern aus 3 oder 4 Ziffern, das Quadrat der Hunderte aus 5 oder 6 Ziffern, u. s. w. Ueberhaupt enthält das Quadrat nicht mehr als doppelt so viel Ziffern, als aus welchen die Wurzel bestehet.

So ist z. B.

$1^2 = 1$ und $9^2 = 81$

$10^2 = 100$ $\quad 99^2 = 9801$

$100^2 = 10000$ $\quad 999^2 = 998001$

$1000^2 = 1000000$ $\quad 9999^2 = 99980001$

Hieraus folget dann: 1. Daß man bei einem ieden gegebenen Quadrate in Zahlen so gleich erkennen könne, aus wie viel Teilen die Wurzel bestehe, wenn man die halbe Anzahl

der

der Ziffern nimt, so das Quadrat enthält, wobei aber die ungerade Anzahl der Ziffern des Quadrats um Eins vermehret wird; oder, wenn man das Quadrat von der Rechten zur Linken in Classen einteilet, und iede Classe zwo Ziffern giebt, wenn gleich bisweilen in der lezten zur Linken nur eine übrig bleibt, indem das Quadrat nicht allezeit doppelt so viel Ziffern enthält als die Wurzel, sondern bisweilen eine weniger. So viele Classen herauskommen, so viele Teile hat die Wurzel.

2. Bestehet das Quadrat aus einer ungeraden Anzahl Ziffern, so ist der erste Teil der Wurzel allezeit weniger als 4.

3. Das Quadrat eines ieden Teils ist insbesondere in der ihr zugehörigen Classe zu suchen, worauf zunächst das doppelte Produkt desselben in den folgenden Teil zu finden.

Aufgabe.

§. 135. Aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen.

Auflösung. 1. Teilet die gegebene Zahl in Classen ein, von der Rechten gegen die Linke, und gebet ieder Classe zwo Ziffern, ausgenommen daß in der lezten auch nur eine zu stehen kommen kan §. 134.

2. Weil in der lezten Classe zur Linken das Quadrat des ersten Teils, oder a^2 stecket §. 134. so suchet in der Wurzeltafel §. 133.

das

das Quadrat, so ihm am nächsten komt, und ziehet es davon ab. Die darüber stehende Wurzel setzet wie bei der Division in die Stelle des Quotienten, so habt ihr den ersten Teil $= a$.

3. In dem Ueberreste stecket also noch $2ab + b^2$. Dupplirt demnach den gefundenen ersten Teil, und setzet ihn unter die linke Ziffer der folgenden Classe; dividiret hiemit die überstehende Zahl, so bekomt ihr den andern Teil der Wurzel $= b$, so ihr zu dem vorigen in die Stelle des Quotienten setzet.

4. Setzet eben diesen gefundenen Quotienten zu dem Divisor zur Rechten, so habt ihr $2a + b$. Multipliciret diese Zahl durch eben diesen Quotienten, so bekomt ihr $2ab + b^2$, folglich das ganze Quadrat, wenn es zweinamigt ist, so ihr von der oben stehenden Zahl abziehet.

5. Hat das Quadrat noch mehrere Classen, so setzet die nächstfolgende zu dem übrig gebliebenen Reste herunter. Sehet hierauf die bisher gefundene Teile der Wurzel von neuen als einen einzigen an, §. 130. und wiederholet die vorhergehende Rechnung so lange, bis keine Classe mehr übrig ist, so ist die gesuchte Quadratwurzel gefunden worden.

3. B.

Quadr. Wurzel

$a + b$

5|29 | 23

$a^2 = 4$

$2ab + b^2 = 1.29$

$2a + b = 43$

$b = 3$

$2ab + b^2 = 1\,29$

0

Quadrat Wurzel

$a + b + c$

Oder 5|71|21 | 239

$a^2 = 4$

1.71

$2a + b = 43$

3

$2ab + b^2 = 1\,29$

42.21

$2(a + b) + c = 469$

9

$2(a + b)c + c^2 = 42\,21$

Es ereignet sich sehr oft, daß man bei Ausziehung der Wurzel den Quotienten kleiner annehmen mus, als bei der gewöhnlichen Division zu geschehen pfleget. Die Ursache davon ist, daß der ganze Ueberrest nicht blos das Produkt 2ab sondern auch noch b^2 enthält, welche zusammen genommen davon abgezogen werden müssen.

Auf-

Aufgabe.

§. 136. Aus einer unvolkommenen Quadratzahl die Wurzel durch **Näherung** zu finden, d. i. der wahren vermittelst eines Bruches so nahe zu kommen, als man verlanget.

Auflösung. 1. Bestimmet den Nenner desienigen Bruches in welchem ihr die abgängige Teile der Wurzel suchen wollet.

2. Quadriret diesen Nenner, und multipliciret damit die gegebene Quadratzahl, so ist solche auf einen Bruch gesetzet worden, von dessen Nenner die Wurzel bekant ist §. 81.

3. Ziehet die Wurzel aus nach der gewöhnlichen Art, so bekomt ihr den Zähler eines Bruches, aus welchem ihr nicht nur die Ganzen durch die Division mit dem Nenner leicht finden könnet, sondern welcher auch der wahren Wurzel so nahe komt, als ihr verlanget habt.

Obgleich die Wurzel einer unvolkommenen Quadratzahl irrational ist, und folglich nie ganz genau gefunden werden kan, sondern bei der Ausziehung noch allezeit ein Ueberrest verbleiben mus, so kan man doch durch Auflösung der Zahl in einen Bruch der wahren Wurzel so nahe kommen, daß in der Ausübung kein merklicher Irrtum mehr daraus entstehen kan. Ob nun gleich an sich der Nenner des Bruches den man dazu erwählen möch-

te, wilkührlich ist, so geschiehet doch diese Näherung um der Bequemlichkeit der Rechnung willen, am gewöhnlichsten durch Decimal-Brüche. Da nun bei Quadrirung des Nenners eines zehnteiligen Bruches nur die Anzahl Nullen desselben verdoppelt werden darf, so darf man auch nur an die gegebene Quadratzahl doppelt so viele Nullen anhängen, als der Nenner desselben bekommen sol; oder man darf nur bei der Ausziehung eben so viele Classen von Nullen hinzufügen, als man in dem Zähler des Bruches Ziffern verlanget; wie solches die folgende Aufgaben ausführlicher zeigen.

Aufgabe.

§. 137. Bei Ausziehung der Quadratwurzel die Näherung in Decimalen zu verrichten.

Auflösung. 1. Nachdem ihr bei Ausziehung der Wurzel bis auf die lezte Classe gekommen, so hänget an den Ueberrest zur Rechten noch eine neue Classe von zwo Nullen an, so ist es so viel, als wenn die Zahl wäre mit 100 multiplicieret worden §. 136.

2. Setzet hierauf die Ausziehung der Wurzel nach den vorigen Regeln fort, so wird der neue Quotient der Zähler eines Bruches, wovon der Nenner 10 ist.

3. An den Ueberrest hänget von neuen eine Classe von zwo Nullen an, so ist es so viel als wenn die Zahl wäre mit 10000 multiplicieret worden; fahret hierauf von neuen in

der

der Rechnung fort, so wird der Nenner des Quotienten = 100.

4. Da nun allezeit noch ein Ueberrest übrig bleiben mus, so kan diese Annäherung so weit es nöhtig, ia bis ins unendliche fortgesetzet werden; wobei nur zu beobachten, daß bei ieder neuen Classe von zwo Nullen der Nenner des Bruches um eine Nulle vermehret werde.

Z. B.

8|54|37|292,296.... Oder $292\frac{296}{1000}$.

```
4
-----
4.54
  49
-----
 441
-----
  13.37
   582
  -----
  1164
  -----
    173.00
    5842
    -----
   11684
   ------
    5616.00
     58449
    -------
    526041
    -------
      35559.00
       584586
      --------
      3507516
      -------
        48384
```

Zusatz.

§. 138. Wenn aus einer Zahl so aus Ganzen und einem zehnteiligem Bruche bestehet, die Quadratwurzel zu ziehen ist, so ziehet sie aus den Ganzen und auch aus dem Bruche. Wobei nur noch zu merken:

1. Wenn die Ganzen kein volkommenes Quadrat sind, so werden sogleich die zwo erste Decimal-Ziffern als eine neue Classe zu dem gebliebenen Ueberreste herunter gesetzet. Der neue Quotient ist alsdann die erste Ziffer des Decimal-Bruches.

2. Wenn der Decimal-Bruch aus ungeraden Ziffern bestehen solte, so wird Rechts eine Nulle zugesetzet, damit die Classen desselben erfüllet werden.

Z. B. 84,37|20|9,18.
81
3.37
1 81
1 81
1 56.20
18 28
1 46 24
9 96

Zusatz.

§. 139. Da ein Bruch nicht anders zum Quadrate erhoben wird, als daß sowohl der Zähler als Nenner quadriret werde, §. 118. so mus auch umgekehrt bei Ausziehung der Quadratwurzel aus demselben sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner die Wurzel gezogen werden.

So ist z. B. die Quadratwurzel von $\frac{4}{9} = \frac{2}{3}$.

Wäre aber der Zähler oder Nenner kein volkommenes Quadrat, so suchet von beiden die Wurzel durch Näherung nach §. 137.

Z. B. Es wäre aus $\frac{18}{24}$ die Quadratwurzel zu ziehen.

18|00|42 Zähler	24|00|48 Nenner
16	16
2.00	8.00
82	88
1 64	7 04
36	96

Folglich ist $\sqrt[2]{\frac{18}{24}} = \frac{42}{48}$.

Wären aber auch Ganze bei dem Bruch, so ebenfals kein volkommenes Quadrat enthielten, so setzet man sie entweder auf eben diesen Bruch §. 81. und ziehet alsdann die Wurzel wie vorhero heraus; oder man verwandelt den Bruch in einen zehnteiligen §. 108. und ziehet hierauf nach §. 138. die Wurzel heraus.

Zusaz.

§. 140. Ist aber die gegebene Quadratzahl eine benante Zahl, bei welcher das zehnteilige Maas nicht gebräuchlich, so thut man am besten, um die sehr beschwerliche Reduktion in ein anderes Maas zu vermeiden, wenn man solche auf so kleine Quadrat-Teile setzet, als man nöthig erachtet, oder welches eins ist, wenn man die Wurzel in einem Bruche suchet, der das ihr eigentümliche Maas zum Nenner hat.

Z. B. Es wäre aus 7 Quadratklaftern die Wurzel zu ziehen, da nun hiebei das zwölfteilige Maas im Gebrauche ist, so suchet man die Wurzel auch in solchen Teilen, z. B. in Punkten, zu welchem Ende die Zahl 7 auf Quadratpunkte gesetzet werden mus. Da nun eine Quadratklafter 36 Quadratschuh, dieser 144 Quadratzoll; dieser 144 Quadratlinien, und eine Quadratlinie 144 Quadratpunkten enthält, so wird die Zahl 7 durch 36 × 144 × 144 × 144 multipliciret, wodurch ihr bekomt: 752467968 woraus die Wurzel 27431 Punkten oder 2 Klaftern, 3 Schuh, 10 Zoll, 5 Linien, 11 Punkten sein wird.

Zusaz.

§. 142. Weil das Quadrat entstehet, wenn die Wurzel durch sich selbst multipliciret wird, §. 119. so bestehet die Probe der Auszie-

ziehung der Quadratwurzel darin, daß man solche wieder zum Quadrate erhebet, und die bei der Ausziehung etwan übrig gebliebene Zahl dazu addiret, deren Summe alsdann dem gegebenen Quadrate gleich sein mus.

Lehrsaz.

§. 142. Der Cubus einer zweinamigten Wurzel bestehet 1. aus den einzelnen Cubis des ersten und andern Teils. 2. Aus einem dreifachen Produkte des Quadrats des ersten Teils in den andern Teil, und 3. aus einem dreifachen Produkte des ersten Teils in das Quadrat des andern Teils.

Beweis. Es sei die Wurzel $a + b$, so ist das Quadrat davon $a^2 + 2ab + b^2$ §. 128. und der Cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Oder in Zahlen sei die Wurzel $23 = 20 + 3$ so ist das Quadrat $= 400 + 2\,(20 \times 3) + 9$, wovon der Cubus demnach ist $=$

$$\underset{a^3}{8000} + \underset{3a^2b}{3\,(400 \times 3)} + \underset{3ab^2}{3\,(20 \times 9)} + \underset{b^3}{27}$$

$= 12167$.

Zusaz.

§. 143. Auf eben diese Art findet man, daß der Cubus einer dreinamigten Wurzel bestehe

1. Aus dem Cubus eines ieden Teils insbesondere.

2. Aus dem dreifachen Produkte des Quadrats des ersten Teils in den andern Teil.

3. Aus einem dreifachen Produkte des ersten Teils in das Quadrat des andern Teils.

4. Aus einem dreifachen Produkte des Quadrats des ersten und andern Teils zusammen genommen in den dritten Teil, und endlich

5. Aus einem dreifachen Produkte des ersten und andern Teils in das Quadrat des dritten Teils.

Denn wenn die Wurzel $= a + b + c$, so ist das Quadrat davon $= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ folglich ist der Cubus $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. Nun aber ist $3a^2c + 6abc + 3b^2c = 3\,\overline{(a + b)}^2 c$, und $3ac^2 + 3bc^2 = 3\,(a + b)\,c^2$. Folglich ist der ganze Cubus $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,\overline{(a + b)}^2\,c + 3\,(a + b)\,c^2 + c^3$.

Man kan demnach überhaupt auf eine gleichförmige Art sagen, daß der Cubus einer ieden vielnamigten Wurzel bestehe.

1. Aus den Cubis eines ieden Teils insbesondere.

2. Aus einem dreifachen Produkte der Quadrate aller vorhergehenden Teile in die nachfolgende, und

3. Aus einem dreifachen Produkte aller vorhergehenden Teile in die Quadrate der nachfolgenden.

Zusaz.

§. 144. Da man alle vielnamigte Wurzeln nur als eine zweinamigte ansehen kan, wenn man alle vorhergehende Teile bis auf den lezten nur für einen annimt, so wird der Lehrsaz §. 142. ein algemeiner Ausdruck für die Cuben aller vielnamigten Wurzeln.

Es sei z. B. die Wurzel $= a + b + c + d$, so ist der Cubus davon $= \overline{a + b + c}^3 + 3\overline{(a + b + c)}^2 d + 3(a + b + c) d^2 + d^3$.

Aufgabe.

§. 145. Aus einem volkommenen algebraischen Cubus die Wurzel zu ziehen.

Auflösung. 1. Suchet die Cubikwurzel des ersten Teils nach §. 127. und sezet solche, wie bei Auszziehung der Quadratwurzel in die Stelle des Quotienten; den Cubus davon aber ziehet von der gegebenen Cubikgrösse ab.

2. Nehmet das Quadrat dieses gefundenen ersten Teils dreimal, und dividiret damit den Ueberrest, so bekomt ihr den andern Teil

der

der Wurzel, welchen ihr zu dem vorigen setzet.

3. Hierauf multipliciret den Divisor mit diesem zweiten Teil, so habt ihr das dreifache Produkt des Quadrats des ersten Teils in den andern.

4. Multipliciret ferner das Quadrat des zweiten Teils mit dem ersten, und nehmet dieses Produkt dreimal; so habt ihr das dreifache Produkt des ersten Teils in das Quadrat des andern.

5. Cubiret den zweiten Teil der Wurzel, und ziehet alle drei Produkte zusammen von dem vorigen Ueberreste ab.

6. Hat die Wurzel noch mehrere Teile, so stehet die bereits gefundene zusammen genommen von neuen als den ersten Teil an §. 144. nehmet das Quadrat davon dreimal, und dividiret damit den lezten Ueberrest, so bekomt ihr den dritten Teil der Wurzel.

7. Setzet die Rechnung auf die vorhergehende Art fort, so bekomt ihr nach und nach alle Teile der Wurzel, und der Cubus ist in seine einzelne Produkte aufgelöset worden §. 143.

3. B.

Cubus | Cubikwurzel

$a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3 \mid a - x$

a^3

Div. $+3a^2 \mid -3a^2x + 3ax^2 - x^3$

$-3a^2x$

$+3ax^2 - x^3$

$+3ax^2$

$-x^3$

$-x^3$

Oder $\frac{a^3}{8} + \frac{3a^2b}{4} + \frac{3ab^2}{2} + b^3 \mid \frac{a}{2} + b$

$\frac{a^3}{8}$

Div. $\frac{3a^2}{4} \mid + \frac{3a^2b}{4} + \frac{3ab^2}{2} + b^3$

$+ \frac{3a^2b}{4}$

$+ \frac{3ab^2}{2} + b^3$

$+ \frac{3ab^2}{2}$

$+b^3$

$+b^3$

Zu-

Zusatz.

§. 146. Wenn die Wurzel nicht gänzlich ausgezogen werden kan, sondern noch ein Ueberrest verbleibet, welcher Fal sich am häuffigsten ereignet, so ist es ein Beweis, daß die Wurzel irrational sei, und die Ausziehung davon kan nicht anders als durch das Wurzelzeichen angedeutet werden.

Z. B. Aus $a^3 + 6a^2b + b^3 + 2a^2c$ ist die Cubikwurzel $= \sqrt[3]{a^3 + 6a^2b + b^3 + 2a^2c}$.

§. 147. Die Ausziehung der Cubikwurzel in Zahlen geschiehet durch Zerlegung der Cubikzahl in alle einzelne Produkte, woraus sie entstanden, zu welchem Ende man die algemeine Formel §. 142. 144. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ dabei vor Augen haben mus. Und da man dabei die Cubos aller Einheiten oder aller einnamigten Wurzeln zu wissen nöhtig hat, so sind sie in folgender Tabelle enthalten.

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729

§. 148. Vermöge dem zehnteiligem Maasse der Zahlen bestehet ein ieder Cubus aus nicht mehr als dreimal so viel Ziffern als die Wurzel enthält. Denn

$1^3 = 1$
$10^3 = 1000$
$100^3 = 1000000$
$1000^3 = 1000000000$ u. s. w.

und $9^3 = 729$
$99^3 = 970299$
$999^3 = 997002999$
$9999^3 = 999700029999$ u. s. w.

Hieraus folget dann: 1. Daß man aus einer ieden gegebenen Cubikzahl erkennen könne, aus wie viel Teilen die Wurzel bestehe, wenn man sie von der Rechten gegen die Linke in Classen einteilet, und einer ieden Classe drei Ziffern giebt; denn so viele Classen herauskommen, aus eben so viel Ziffern bestehet die Wurzel. Nur können in der lezten Classe zur Linken auch weniger als drei zu stehen kommen, indem der Cubus einer Zahl nicht allemal dreimal so viel Ziffern enthält als die Wurzel, sondern auch bisweilen um eine oder zwo weniger.

2. Der Cubus eines ieden Teils ist in der ihm zugehörigen Classe zu suchen, worauf die übrige Produkte, woraus der ganze Cubus bestehet, §. 143. der Ordnung nach folgen.

Aufgabe.

§. 149. Aus einer gegebenen Zahl die Cubikwurzel auszuziehen.

Auf-

Auflösung. 1. Teilet die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen ein, und gebet ieder Classe drei Ziffern, ausser daß in der lezten auch weniger sein können. So viele Classen herauskommen, so viele Teile hat die Wurzel §. 148.

2. Weil in der ersten Classe zur Linken der Cubus des ersten Teils stecket, so suchet in der Wurzeltafel §. 147., welche Zahl ihr am nächsten komme. Diese ist a^3, ziehet sie davon ab, und die Wurzel sezet in die Stelle des Quotienten, so habet ihr den ersten Teil der Wurzel $= a$.

3. In dem Ueberreste stecket noch zuerst $3a^2b$. Wenn ihr also mit $3a^2$ dividiret, so bekomt ihr b als den zweiten Teil. Folglich quadriret den gefundenen Quotienten, und nehmet dieses Quadrat dreimal. Hierauf sezet das Produkt unter den vorigen Ueberrest, iedoch so daß seine Einheit unter die erste Ziffer der folgenden Classe zu stehen komme, und dividiret, so bekomt ihr den andern Teil $=$ b, den ihr auch in die Stelle des Quotienten setzet.

4. Multipliciret den Divisor mit eben diesen Quotienten, so habt ihr $3a^2b$. Es stekt also noch in der Cubikzahl $3ab^2 + b^3$. Folglich

5. Quadriret den neuen Quotienten, tripliret ihn und multipliciret ihn durch den ersten

sten Teil, welches Produkt ihr unter das vorige setzet, iedoch so, daß ihr um eine Ziffer weiter zur Rechten rücket, so habet ihr auch $3ab^2$.

6. Leztens stecket noch darin b^3. Folglich cubiret den lezten Quotienten, und setzet ihn unter die vorige Produkte, wiederum mit Vorrückung einer Ziffer.

7. Addiret alle diese drei Produkte zusammen, so habt ihr $3a^2b + 3ab^2 + b^3$; folglich die ganze Cubikzahl, welche ihr demnach von der gegebenen abziehet.

8. Bestehet die Wurzel aus mehrern Teilen, so setzet die nächstfolgende Classe zu dem übrig gebliebenen Reste herunter. Sehet nunmehro die bisher gefundene Teile der Wurzel als einen einzigen an §. 144. und wiederholet die vorhergehende Rechnung so lange, bis keine Classe mehr übrig ist, so bekomt ihr alle gesuchte Teile der Wurzel.

Es sei z. B. die Cubikzahl 78402752, so geschiehet die Auszichung der Wurzel folgendergestalt

$$
\begin{array}{rcl}
 & & \quad\quad\quad a + b + d \\
 & & 78|402|752|428 \\
a^3 & = & 64 \\
\hline
 & & 14402 \\
\text{Divisor } 3a^2 & = & 48 \\
\hline
3a^2b & = & 96 \\
3ab^2 & = & 48 \\
b^3 & = & 8 \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 & = & 10088 \\
\hline
 & & 4314752 \\
\text{Divis. } 3\overline{(a+b)}^2 & = & 5292 \\
\hline
3(a+b)^2 d & = & 42336 \\
3(a+b)d^2 & = & 8064 \\
d^3 & = & 512 \\
\hline
3\overline{(a+b)}^2 d + & & \\
3(a+b)d^2 + d^3 & = & 4314752 \\
\hline
 & & \text{— —}
\end{array}
$$

So wie bei Ausziehung der Quadratwurzel der Quotient öfters kleiner angenommen werden mus, als bei der Division zu geschehen pfleget, so ist solches hier noch viel nöhtiger, indem der Dividendus nicht blos das Produkt $3a^2b$ sondern auch noch $3ab^2$ und b^3 enthält, so zusammen genommen davon abgezogen werden müssen.

Aufgabe.

§. 150. Aus einer unvolkommenen Cubikzahl die Wurzel durch Näherung zu finden.

Auf=

Auflösung. 1. Bestimmet wie in §. 136. den Nenner desienigen Bruches, in welchem ihr die abgängige Teile der Wurzel suchen wollet.

2. Cubiret diesen Nenner und multipliciret damit die gegebene Cubikzahl, so ist solche auf einen Bruch gesetzet worden, von dessen Nenner die Wurzel bekant ist §. 81.

3. Ziehet nunmehro die Wurzel aus nach der vorgeschriebenen Art, so bekomt ihr den Zähler eines Bruches, aus welchem ihr nicht nur die Ganzen durch die Division mit dem Nenner leicht finden könnet, sondern welcher auch der wahren Wurzel so nahe komt, als ihr verlanget habt.

Weil diese Annäherung der Irrationalwurzel nicht leicht in einem andern als zehnteiligen und zwölfteiligen Bruche zu geschehen pflegt, so werden wir uns auch blos bei denselben aufhalten.

Aufgabe.

§. 151. Bei Ausziehung der Cubikwurzel die Näherung in Decimalen zu verrichten.

Auflösung. 1. Nachdem ihr bei Ausziehung der Wurzel bis auf die lezte Classe gekommen, so hänget an den Ueberrest zur Rechten noch eine neue Classe von drei Nullen an, so ist es so viel als wenn die Zahl wäre mit 1000 oder dem Cubus von 10 multipliciret worden.

2. Setzet hierauf die Ausziehung der Wurzel nach den vorigen Regeln fort, so wird der neue Quotient der Zähler eines Bruches, wovon der Nenner 10 ist.

3. An den Ueberrest hänget von neuen eine Classe von drei Nullen an, so ist die Zahl mit 100^3 multipliciret worden, und wenn ihr die Rechnung fortsetzet, so wird der Nenner des Quotienten = 100.

4. Da noch allezeit ein Ueberrest bleiben mus, so kan diese Annäherung so weit als es nur für nöhtig erachtet wird, fortgesetzet werden. So viele Ziffern als in dem Zähler des Decimalbruches verlanget werden, so viele Classen von drei Nullen müssen der Cubikzahl zugesetzet werden.

8|766|20,618
8

766
12

766000
1200

7200
2160
216

741816

24184000
127308

127308
618
1

12736981

11447019000
12743163

101945304
395712
512

10198488032

1248530968

Auf eben diese Art bekomt ihr aus der Zahl 4 die Cubikwurzel 1,5874.

Zusatz.

§. 152. Alles was §. 138. und 139. in Absicht auf die Quadratwurzel erinnert worden, gilt auch hier mit geänderten Umständen bei Ausziehung der Cubikwurzel.

Zusatz.

§. 153. Ist endlich die gegebene Cubikzahl eine benante Zahl, bei welcher das zwölfteilige Maas gebräuchlich, so mus sie auf so kleine Cubikteile gesetzet werden, als man es für nöhtig erachtet, woraus hernach die Wurzel nach der gewöhnlichen Art gezogen wird.

Z. B. Es wäre aus 4 Cubikklaftern die Wurzel zu ziehen, so kan man diese Zahl auf Cubikpunkten setzen. Da nun eine Cubikklafter 216 Cubikschuh, ein Cubikschuh 1728 Cubikzoll u. s. f. enthält, so wird die Zahl 4 multiplicirt mit 216 × 1728 × 1728 × 1728. Wann nun hieraus die Wurzel gezogen wird, so bekomt ihr 1 Klafter 3 Schuh 6 Zoll 3 Linien 6 Puntten.

Zusatz.

§ 154. Die Probe der Ausziehung der Cubikwurzel bestehet darin, daß man die gefundene Wurzel zum Quadrate erhebet, und dieses von neuen mit der Wurzel multipliciret, wozu man noch den etwan übrig gebliebenen Rest addiret. Denn auf diese Art ist der Cubus entstanden §. 119.

Zu-

Zusaz.

§. 155. Wenn man auf eben die Art, als §. 128. und 142. geschehen, untersuchet, aus was für Produkten eine iede höhere Dignität von einer zwei- oder vielnamigten Wurzel bestehe, so kan man auf eine gleichförmige Art die Regeln finden, eine gegebene höhere Dignität in ihre einzelne Produkte, woraus sie entstanden, wieder anfzulösen, und folglich die Wurzel daraus zu ziehen.

So ist die vierte Potenz von $a + b = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, und die fünfte $= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Jedoch da dergleichen Rechnungen gar selten vorkommen, so würde es eine unnöhtige Weitläuftigkeit sein, sich mit Ausführung dieser Regeln aufzuhalten. In vorkommenden Fällen kan man auch noch bisweilen einige Hülfsmittel gebrauchen.

Z. B. Die Wurzel der vierten Potenz aus einer Grösse zu ziehen, darf man nur zuerst daraus die Quadratwurzel, und aus dieser von neuen die Quadratwurzel ausziehen. Auf eben diese Art bekomt man die Wurzel der sechsten Potenz, wenn man zuerst daraus die Cubikwurzel, und aus dieser wiederum die Quadratwurzel ausziehet §. 127.

Zusatz.

§. 152. Alles was §. 138. und 139. in Absicht auf die Quadratwurzel erinnert worden, gilt auch hier mit geänderten Umständen bei Ausziehung der Cubikwurzel.

Zusatz.

§. 153. Ist endlich die gegebene Cubikzahl eine benante Zahl, bei welcher das zwölfteilige Maas gebräuchlich, so mus sie auf so kleine Cubikteile gesetzet werden, als man es für nöhtig erachtet, woraus hernach die Wurzel nach der gewöhnlichen Art gezogen wird.

Z. B. Es wäre aus 4 Cubikklaftern die Wurzel zu ziehen, so kan man diese Zahl auf Cubikpunkten setzen. Da nun eine Cubikklafter 216 Cubikschuh, ein Cubikschuh 1728 Cubikzoll u. s. f. enthält, so wird die Zahl 4 multiplicirt mit 216 × 1728 × 1728 × 1728. Wann nun hieraus die Wurzel gezogen wird, so bekomt ihr 1 Klafter 3 Schuh 6 Zoll 3 Linien 6 Punkten.

Zusatz.

§ 154. Die Probe der Ausziehung der Cubikwurzel bestehet darin, daß man die gefundene Wurzel zum Quadrate erhebet, und dieses von neuen mit der Wurzel multipliciret, wozu man noch den etwan übrig gebliebenen Rest addiret. Denn auf diese Art ist der Cubus entstanden §. 119.

Zusatz.

§. 155. Wenn man auf eben die Art, als §. 128. und 142. geschehen, untersuchet, aus was für Produkten eine iede höhere Dignität von einer zwei- oder vielnamigten Wurzel bestehe, so kan man auf eine gleichförmige Art die Regeln finden, eine gegebene höhere Dignität in ihre einzelne Produkte, woraus sie entstanden, wieder aufzulösen, und folglich die Wurzel daraus zu ziehen.

So ist die vierte Potenz von $a + b = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, und die fünfte $= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. Jedoch da dergleichen Rechnungen gar selten vorkommen, so würde es eine unnöhtige Weitläuftigkeit sein, sich mit Ausführung dieser Regeln aufzuhalten. In vorkommenden Fällen kan man auch noch bisweilen einige Hülfsmittel gebrauchen.

Z. B. Die Wurzel der vierten Potenz aus einer Grösse zu ziehen, darf man nur zuerst daraus die Quadratwurzel, und aus dieser von neuen die Quadratwurzel ausziehen. Auf eben diese Art bekomt man die Wurzel der sechsten Potenz, wenn man zuerst daraus die Cubikwurzel, und aus dieser wiederum die Quadratwurzel ausziehet §. 127.

Drittes Hauptstück.
Von Irrationalgrössen.

Erklärung.
§. 156.

Wenn aus einer Grösse eine Wurzel gezogen ist, so heist der gesamte Ausdruck eine **Wurzelgrösse**. Ist diese Wurzel irrational §. 123. oder kan sie nicht würklich ausgezogen werden, sondern mus nur angedeutet werden, so ist es eine **irrationale Wurzelgrösse**, oder kürzer eine **irrationale Grösse**.

So sind $\sqrt[2]{ab}$ und $\sqrt[3]{a^2b}$ Irrationalgrössen.

Erklärung.

§. 157. Wenn die Wurzelgrössen einerlei Exponenten der Wurzel haben, so sind sie von **einer Benennung** (ähnlich). Haben aber ihre Wurzeln verschiedene Exponenten, so sind sie von **verschiedener Benennung** (unähnlich). Da nun die Ausziehung einer Wurzel aus einer Potenz angedeutet werden kan, wenn der Exponent der Potenz in einen Bruch ver-

verwandelt wird, dessen Nenner der Exponent der Wurzel ist §. 127. so sind die Wurzelgrössen von einer Benennung, wenn diese Exponenten der Potenz einerlei Nenner haben, und umgekehrt, wenn diese Nenner verschieden sind, so sind sie von verschiedener Benennung.

Z. B. $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$ haben einerlei Benennung, desgleichen auch $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ und $\sqrt[m]{a^r} = a^{\frac{r}{m}}$. Aber $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$ und $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$, ferner $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ und $\sqrt[r]{x^s} = x^{\frac{s}{r}}$ sind von verschiedener Benennung.

Aufgabe.

§. 158. Irrationalgrössen von verschiedener Benennung zu einer Benennung zu bringen.

Auflösung. 1. Drücket iede Wurzelgrösse als eine Potenz aus, deren Exponent ein Bruch ist §. 127.

2. Bringet diese Brüche zu einer Benennung §. 88. so bleiben die Exponenten der Potenz dadurch unverändert, und der neue Nenner dieses Bruchs kan als der Exponent der Wurzel angenommen werden.

Z. B. Man solle $\sqrt[3]{a^2}$ und $\sqrt[2]{b^5}$ zu einer Benennung bringen, so drücke man sie folgendergestalt

aus $a^{\frac{2}{3}}$ und $b^{\frac{5}{2}}$. Bringt man nun die beide Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{2}$ zu einer Benennung, so hat man $\frac{4}{6}$ und $\frac{15}{6}$; folglich bekomt man folgende Irrationalgrössen von einer Benennung $a^{\frac{4}{6}}$ und $b^{\frac{15}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^4}$ und $\sqrt[6]{b^{15}}$. Oder überhaupt $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{y^s}$ sind gleich $x^{\frac{n}{m}}$ und $y^{\frac{s}{r}}$. Bringt man diese Exponenten zu einer Benennung, so bekome man $x^{\frac{nr}{mr}}$ und $y^{\frac{ms}{mr}}$ das ist $\sqrt[mr]{x^{nr}}$ und $\sqrt[mr]{y^{ms}}$.

Aufgabe.

§. 159. **Irrationalgrössen einfacher auszudrücken, d. i. in andere zu verwandeln, so nur zum Teil irrational sind, oder wovon ein Faktor eine Rational- der andere aber eine Irrationalgrösse ist.**

Auflösung. 1. Dividiret die Grösse unter dem Wurzelzeichen durch einen Faktor, der eine solche Potenz ist, als der Exponent des Wurzelzeichens andeutet.

2. Die Wurzel dieses Faktors, so dadurch zu einer rationalen Grösse wird, setzet vor das Wurzelzeichen, den andern Faktor aber lasset unter demselben stehen.

3. Ist aber diese Division und Auflösung in dergleichen Faktoren unmöglich, so lässet sich auch die Irrationalgrösse nicht kürzer ausdrücken.

3. B.

Z. B. $\sqrt[2]{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.
Ferner $\sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{8 \times 7} = 2\sqrt[3]{7}$ und überhaupt $\sqrt[m]{a^m b} = a\sqrt[m]{b}$.

Zusatz.

§. 160. Hieraus folget, daß man auch umgekehrt eine Grösse so zum Teil rational, zum Teil aber irrational ist, ganz irrational machen könne, wenn man die Grösse vor dem Wurzelzeichen zu derienigen Dignität erhebt, so der Exponent der Wurzel andeutet, und hierauf die Grösse unter dem Wurzelzeichen damit multipliciret.

Z. B. $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \times 2} = \sqrt{50}$ und
$5\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{5^3 \times 4} = \sqrt[3]{500}$
$3a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{27a^3 b}$, und $a^m\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^{mn}x}$.

Aufgabe.

§. 161. Irrationalgrössen zu addiren und zu subtrahiren.

Auflösung. 1. Bringet sie zu einer Benennung §. 158.

2. Suchet sie einfacher auszudrücken §. 159. so daß überal unter dem Wurzelzeichen nur einerlei Grösse zu stehen komme.

3. Addiret oder subtrahiret die vor dem Wurzelzeichen stehende Rationalgrössen oder

Co-

Coefficienten. In allen übrigen Fällen werden beide Rechnungen nur gewöhnlich durch das Additions- und Subtraktionszeichen angedeutet.

Z. B. $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, und $\sqrt{63} - \sqrt{28} = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = 1\sqrt{7}$.

Ferner $\sqrt[3]{24ab} + \sqrt[3]{81ab} =$

$2\sqrt[3]{3ab} + 3\sqrt[3]{3ab} = 5\sqrt[3]{3ab}$.

Aufgabe.

§. 162. Irrationalgrössen durch einander zu multipliciren und zu dividiren.

Auflösung. 1. Bringet sie zu einer Benennung.

2. Multipliciret oder dividiret die unter dem Wurzelzeichen stehende Grössen, und vor dem Produkte oder Quotienten derselben setzet das Wurzelzeichen mit dem vorigen Exponenten.

3. Stehen Grössen vor dem Wurzelzeichen, so müssen auch diese durch einander multipliciret oder dividiret werden.

Z. B. $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$, und

$(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$

$\sqrt{9} + \sqrt{6} - \sqrt{6} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$.

Oder $5\sqrt{2a} \times 3\sqrt{6a} = 15\sqrt{12a^2} = 30a\sqrt{3}$.

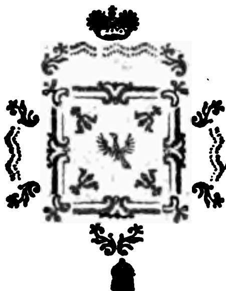
Fer-

Ferner $\frac{\sqrt[3]{35}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{5}$, und $\frac{ab\sqrt{ce}}{bf\sqrt{ge}} = \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$.

Grundsätze.

§. 163. 1. Wenn zwo Grössen gleich sind, so sind auch ihre Quadrate, ihre Cubi, und überhaupt alle ihre Potenzen von gleichem Grade gleich, das ist: wenn $a = b$ so ist auch $a^2 = b^2$, $a^3 = b^3$, und überhaupt $a^m = b^m$ §. 56. Num. 3. folglich wenn $a > b$, so ist auch $a^2 > b^2$, und überhaupt $a^m > b^m$.

2. Wenn zwo Grössen gleich sind, so sind auch umgekehrt ihre Wurzeln von einerlei Exponenten einander gleich d. i. wenn $a = b$, so ist auch $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$, und überhaupt $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$. Wenn demnach $a > b$, so ist auch $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$



Fünf-

Fünfter Abschnit.

Die Analysis.

Erstes Hauptstück.

Von der Analysis überhaupt.

Erklärung.

§. 164.

Eine Gleichung (aequatio) entstehet, wenn einerlei Grösse auf zwoerlei Art ausgedrückt und angegeben wird. Diese zween Ausdrücke, zwischen welchen das Zeichen der Gleichheit gesetzet wird, heissen die **Glieder** der Gleichung.

Z. B. $\frac{24}{3} + 4 = 15 - 3$ ist eine Gleichung.

§. 165. Die Wissenschaft unbekante Grössen aus andern bekanten vermittelst der Gleichungen zu finden, ist die **Analysis**, und folglich ein Teil der Algebra §. 57. Es mus demnach die unbekante Grösse durch die andern gegebenen und bekanten durchgängig bestimt

sein,

sein, und eine solche Verhältnis zwischen beiden angegeben werden, wodurch eine Gleichheit fest gesetzet, und die Erfindung der gesuchten Grösse möglich gemacht wird, das ist, die unbekante gesuchte Grösse mus in den gegebenen bekanten ihren hinreichenden Grund haben, damit sie daraus erkant und durch irgend eine Rechnung hergeleitet werden könne. Dieses Verhältnis, so die unbekante Grösse zu den bekanten haben sol, wird auch die **Bedingung** genennet.

Die Analysis ist eigentlich zweierlei, nehmlich der endlichen und unendlichen Grössen. **Endliche** Grössen heissen in der Mathematik dieienigen, deren Gränzen und Schranken bestimt sind, unendliche aber, deren Gränzen unbestimt sind, und so folglich immerfort wachsen und zunehmen, oder umgekehrt beständig abnehmen können, ohne daß die Gränzen davon zu bestimmen wären. Unter der Analysis der unendlichen Grössen ist nun auch die Differential- und Integral-Rechnung begriffen, wovon aber in diesen Anfangsgründen nicht kan gehandelt werden.

Erklärung.

§. 166. Eine Gleichung ist **einfach**, wenn sich in derselben nur eine einzige unbekante Grösse befindet; so bald aber mehrere darin angetroffen werden, so ist sie **zusammengesezet**. Wenn daher auch in einer Gleichung eine und eben dieselbe unbekante Grösse öfters

wiederholet wird, so ist sie dem ohnerachtet noch einfach. Die Ursache der Benennung ist, weil zu Erfindung einer unbekanten Grösse nur diese Gleichung allein so den hinreichenden Grund davon enthält, nöhtig ist; so bald aber mehrere und verschiedene unbekante Grössen vorkommen, so müssen auch so viele Gleichungen gegeben werden, als Grössen zu finden sind.

So ist $a + ac = bx$ oder $4ax + b = 2x - ac$ eine einfache Gleichung; aber $ax + x = 2yb$ ist zusammengesezt.

Erklärung.

§. 167. Diejenige höchste Potenz, auf welche die unbekante, oder wenn mehrere derselben vorhanden sind, die unbekanten Grössen in der Gleichung erhoben worden, giebt auch zugleich der Gleichung selbst den Nahmen. Ist daher die unbekante Grösse noch in der ersten Potenz, so ist es eine Gleichung vom **ersten Grade**, als $a = \frac{bx}{c}$. Ist sie aber zur zwoten Potenz erhoben, so ist es eine Gleichung vom **zweiten Grade** (quadratische Gleichung) wie: $x^2 = ac$; ist sie zur dritten Potenz erhoben, so ist die Gleichung vom **dritten Grade** (kubische Gleichung) wie $2y^3 + c = abc - d$ u. s. w. Und überhaupt werden die-

diese leztere Gleichungen, in welcher die unbekante Grösse auf eine höhere Potenz als die erste erhoben ist, **höhere Gleichungen** genennet.

Es ist hiebei noch zweierlei wohl zu merken: 1. Wenn man nach dieser Erklärung den Grad der Gleichung bestimt, so mus die unbekante Grösse nirgens noch als ein Divisor enthalten sein und vorkommen.

Z. B. $a + \frac{c}{x} = x + b$. Denn daraus folget, daß $ax + c = x^2 + bx$, folglich ist diese Gleichung nicht mehr vom ersten sondern vom zweiten Grade. Ferner die Gleichung $ax^2 = \frac{bc}{x}$ ist nicht vom zweiten sondern vom dritten Grade, weil $ax^3 = bc$.

2. Wenn in einer Gleichung mehrere unbekante Grössen vorkommen, so mit einander multipliciret worden, so wird die Gleichung nicht von dem Grade eines Faktors allein, sondern von dem Grade des ganzen Produkts, folglich von der Summe der Exponenten benennet.

So ist z. B. $yx = ac$ nicht vom ersten sondern vom zweiten Grade, und $x^2y^3 = a^2b^2d$ nicht vom zweiten oder dritten, sondern vom fünften Grade.

Da die gegenwärtige Abhandlung vermöge ihrem Endzwecke nichts als eine Einleitung zu der Ana-

lysis ist, so die ersten Anfangsgründe dazu enthält, so wird auch in derselben nur von den Gleichungen des ersten und zweiten Grades, so am wenigsten entbehret werden können, gehandelt werden.

Erklärung.

§. 168. Eine **algebraische Aufgabe auflösen**, heist aus den gegebenen Bedingungen zwischen der bekanten und der unbekanten Grösse eine Gleichheit bestimmen, und die Glieder derselben dergestalt ordnen, daß die unbekante Grösse ganz allein auf der einen Seite der Gleichung, auf der andern aber nur lauter bekante Grössen erscheinen. Die Art und Weise die Glieder der Gleichung dergestalt zu ordnen und einzurichten, heist die **Reduktion** derselben, und dasienige Glied der Gleichung, welches auf diese Art aus lauter bekanten Grössen zusammen gesetzet worden, wenn auf der andern Seite die unbekante Grösse ganz allein erscheinet, ist der **Wehrt** der leztern, welcher auch zugleich anzeiget, durch was für eine Rechnung die gesuchte Grösse aus den gegebenen gefunden wird.

Aufgabe.

§. 169. Eine Gleichung zu reduciren.

Auflösung. 1. Wenn zu der unbekanten Grösse einige bekante addiret sind, so bringet

man

man die erstere allein, indem die leztern von beiden Gliedern der Gleichung abgezogen werden §. 56. 71. Num. 2.

Z. B. Man hätte $x + a + 2c = b - d$ so subtrahirt beiderseits $a + 2c$, so bekomt ihr $x = b - d - a - 2c$.

2. Wenn im Gegenteil von der unbekanten Grösse einige bekante abgezogen sind, so bringet man sie allein, wenn die leztern zu beiden Gliedern der Gleichung addiret werden.

Z. B. Man hätte $x - a = b$, so addiret beiderseits a, so bekomt ihr $x = b + a$.

Hieraus folget noch, teils, daß man überhaupt eine iede Grösse aus einem Gliede der Gleichung in das andere ohne Nachteil der Gleichung bringen könne, wenn man sie auf der einen Seite ausläst, und auf die andere Seite mit verkehrtem Zeichen hinüber trägt; teils daß man auf diese Art durch die Versezung eine iede negative Grösse positiv machen könne, und umgekehrt; teils auch, daß man eine iede Gleichung auf Nichts oder Nulle reduciren könne, wenn man alle Teile eines Gliedes mit verkehrten Zeichen auf die andere Seite hinüber bringt.

Z. B. Man hätte $3x + c - b = a + d$, und wolte alle in dem ersten Gliede enthaltene bekan-

te Grössen in das andere bringen, so lasset sie in dem ersten aus, und sezet sie in dem andern mit verkehrten Zeichen, so bekomt ihr $3x = a + d - c + b$.

Oder man hätte $2y - 3b - c = y + a - c$,
so ist zuerst $2y - 3b - c - y = a - c$,
und dann $2y - y = a - c + 3b + c$,
oder $y = a + 3b$.

Wäre die unbekante oder auch eine iede andere Grösse in dem einen Gliede negativ und man wolte sie positiv machen, oder auch umgekehrt, so dienet eben diese Versezung dazu. Man hätte

Z. B. $a + 3b = 2c - x$,
so ist $a + 3b + x = 2c$,
und hierauf $x = 2c - a - 3b$.

Ferners es wäre $2y + a = b - y$,
so ist $y = b - a$.

Die Reduktion auf Nulle geschiehet durch eben diese Versezung.

Z. B. Es wäre $ax + bc = c - 3d$,
so ist $ax + bc - c + 3d = 0$.

3. Ist die unbekante Grösse durch eine oder mehrere bekante multipliciret, so kan man sie allein bringen, wenn man alle übrige Grössen der Gleichung durch eben diese bekante Faktores dividiret §. 68. 56. Num. 4.

Z. B. In der Gleichung $ax + b - c = bd$, solle x allein gebracht werden, so seze man zuerst

ax

$ax = bd - b + c$, und hierauf dividire man derseits durch a, so bekomt man $x = \frac{bd - b + c}{a}$.

Oder man hätte $ax + 2bx - c = ac + d$, so ist zuerst $ax + 2bx = ac + d + c$, und hierauf $x = \frac{ac + d + e}{a + 2b}$.

Wäre $ax = bc - 3x$, so ist $ax + 3x = bc$, und $x = \frac{bc}{a + 3}$.

Eben so giebt die Gleichung $x - ac = bc - ax$ zuerst $x + ax = bc + ac$, und hierauf $x = \frac{bc + ac}{1 + a}$.

4. Solte die unbekante Grösse durch bekante dividiret sein, so kan man sie allein bringen, wenn man beide Glieder der Gleichung durch eben diesen Divisor multipliciret §. 45. 56. Num. 3.

Z. B. Es sei $ac = \frac{x}{n}$, so ist $acn = x$.

Oder man hätte $\frac{3x}{2b} + d = ac + c$, so ist $\frac{3x}{2b} = ac + c - d$, und wenn man mit 2b multipliciret $3x = 2abc + 2bc - 2bd$, und endlich $x = \frac{2abc + 2bc - 2bd}{3}$.

Aus diesen beiden lezten Regeln fliessen noch zwo Folgerungen.

Erstens. Wenn in einer Gleichung alle Grössen durch eine andere multipliciret oder dividiret sind, so kan man sie gänzlich ohne Nachtheil der Gleichheit auslassen.

Z. B. Man hätte $ax + ab = ac + ad$,
so seze man $x + b = c + d$,
und hierauf $x = c + d - b$.
Oder es wäre $\frac{x - b + d}{c} = \frac{bd}{c}$,
so ist $x - b + d = bd$,
und $x = bd + b - d$.

Zweitens. Kommen in einer Gleichung Brüche von verschiedener Benennung vor, so werden sie zu einer Benennung gebracht, oder welches eins ist, iede Grösse wird mit einem ieden Nenner multipliciret.

Z. B. Es sei $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} - a = d + x$,
so ist $\frac{60x + 40x + 30x + 24x}{120} - a = d + x$,
das ist $\frac{154x}{120} - x = a + d$,
folglich $154x - 120x = 120a + 120d$,
oder $34x = 120a + 120d$,
und endlich $x = \frac{120a + 120d}{34}$.

Desgleichen, es sei $\frac{ax}{b} + b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c}$

so ist $b = \frac{cx}{d} + \frac{ab}{c} - \frac{ax}{b}$,

und wenn die Brüche auf einen Nenner gebracht werden,

$b = \frac{ccbx + abbd + acdx}{bcd}$,

und $bbcd = ccbx + abbd + acdx$,

folglich $bbcd - abbd = ccbx + acdx$,

also $\frac{bbcd - abbd}{ccb + acd} = x$.

5. Wenn die unbekante Grösse auf eine Potenz erhoben wäre, so wird sie erst durch die Uebersetzung allein gebracht, und hierauf die Wurzel dieser Potenz aus beiden Gliedern der Gleichung gezogen §. 163.

Z. B. Man hätte $x^2 - ab = cd + c$,
so ist $x^2 = cd + c + ab$,
und $x = \sqrt[2]{cd + c + ab}$.

6. Hat die unbekante Grösse ein Wurzelzeichen bei sich, so wird sie wiederum zuerst allein gebracht, und hierauf iedes Glied der Gleichung zu der Potenz erhoben, so das Wurzelzeichen andeutet.

Z. B. Es sei $\sqrt{x} + b = a$,
so ist $\sqrt{x} = a - b$,
folglich $x = a^2 - 2ab + b^2$;

ferner wann $\sqrt[3]{y} = ac$,
so ist $y = a^3c^3$.

Obgleich die bisher angeführte Reduktions-Regeln nicht hinlänglich sind, eine iede Aufgabe aufzulösen, und den Wehrt einer ieden unbekanten Grösse zu finden, so sind sie doch überal nothwendig und unentbehrlich. Die übrige dazu nöhtige Regeln aber kommen entweder noch in dem folgenden vor, oder sie gehören nicht mehr zu dem Endzwecke der gegenwärtigen Anfangsgründe.

Erklärung.

§. 170. Eine algebraische Aufgabe ist bestimt, (determinirt) wenn der Wehrt der unbekanten Grösse nur einer Grösse allein zukomt; ist derselbe aber eine Eigenschaft von mehrern Grössen, so ist sie unbestimt (undeterminirt).

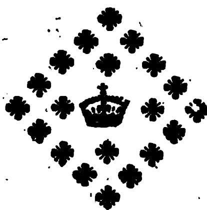
Bei unbestimten Aufgaben sind die Bedingungen der Gleichung nicht hinlänglich, das gesuchte daraus zu finden, und daher ist allezeit etwas willkührliches darin enthalten. Dergleichen Beispiele finden sich, wenn in einer Aufgabe mehr als eine unbekante Grösse enthalten sind, und gesucht werden sollen, und dennoch nicht eben so viele besondere Gleichungen als unbekante Grössen gegeben worden sind, in welchem Falle dann iederzeit etwas darin nach Willkühr angenommen werden kan, wie in folgenden vorkommen wird.

Z. B.

Z. B. Wann man zwo Zahlen verlangte, deren Summe ihrer doppelten Differenz gleich sei, so wäre diese Aufgabe unbestimt, weil diese Eigenschaft mehrern Zahlen, z. B. 3 und 6, 6 und 18 u. s. f. zukomt.

Erklärung.

§. 171. Da die Gleichungen nach der Potenz der darin enthaltenen unbekanten Grösse benant werden, §. 167. so pfleget dieses auch mit den Aufgaben selbst zu geschehen. Eine Aufgabe demnach, in welcher die unbekante Grösse sich noch in der ersten Potenz befindet, heist einfach. Ist aber diese unbekante Grösse auf die zwote, dritte Potenz u. s. f. erhoben, so heist auch die Aufgabe vom zweiten Grade (quadratisch) vom dritten Grade (kubisch) u. s. f.



Zweites Hauptstück.

Von Auflösung einfacher Aufgaben mit einer unbekanten Grösse.

Aufgabe.

§. 172.

Eine algebraische Aufgabe aufzulösen.

Auflösung. 1. Unterscheidet gleich Anfangs auf das sorgfältigste die gegebene und bekante Grössen von den unbekanten. Die ersten bezeichnet mit den Anfangsbuchstaben, und die andern mit den lezten des Alphabets §. 58. welches die **Benennung** der Grössen ist.

2. Untersuchet, was für Bedingungen und was für eine Verhältnis zwischen den bekanten und unbekanten Grössen angegeben worden §. 165. wobei alle Umstände aufs genaueste in Erwegung gezogen werden müssen; und hieraus formiret eine Gleichung, welche nach der geschehenen Benennung der Grössen angesetzet und ausgedrückt wird.

3. Reduciret nach den §. 169. gegebenen Regeln diese Gleichung; und wenn dadurch die unbekante Grösse ganz allein in ein Glied der Gleichung, und in das andere lauter bekan-

kante gebracht worden, so ist die Aufgabe aufgelöset §. 168.

4. Endlich drücket den gefundenen Wehrt der gesuchten Grösse nach den bekanten Grössen in Zahlen aus.

Bei Benennung der Grössen ist noch zu merken, daß man die Vervielfältigung der Buchstaben so viel als nur möglich und die Bequemlichkeit der Rechnung verstattet, vermeiden müsse. Wenn daher zwischen einigen Grössen eine unmittelbare Verhältnis staat findet, so ist es am besten, solche durch die Benennung selbst sogleich auszudrücken.

Es sei z. B. die eine Grösse = a, und die andere sol dreimal so gros sein, so nennet diese leztere lieber = 3a als b.

Die Auflösung dieses gefundenen Wehrts in Zahlen ist eigentlich die Anwendung einer algemeinen Regel auf einen besondern Fal. Denn da unter den Buchstaben womit in der algebraischen Aufgabe die bekante Grössen ausgedrückt werden, nicht blos einerlei sondern unendlich viele Grössen, so die angegebene Eigenschaften an sich haben, verstanden werden können, so erstrecket sich auch die Auflösung der Aufgabe auf alle dieienige Fälle, so darunter begriffen sind, und ist dahero algemein. Aus diesem Grunde ist eine iede algebraische Rechnung eine wahre Demonstration, so alle mögliche Fälle unter sich begreift, und eine eigentliche Rechnungsregel. Wil man nun eine solche algemeine Auflösung benützen, so müssen dieienige Grössen, so vorhero auf eine algemeine Art ausgedrückt

drückt worden, mit Zahlen näher bestimmet und dieienige Rechnungen, so vorher nur durch ihre Zeichen ausgedrückt waren, würklich damit vorgenommen werden, oder sie wird in Zahlen aufgelöset.

Z. B. Man hätte zur Auflösung folgende Gleichung bekommen:

$$x = ab + \frac{2c - d}{n},$$

und man hätte angenommen, daß $a = 3$,

$b = 7$
$c = 29$
$d = 10$
$n = 12$ sei,

so ist $ab = 3 \times 7 = 21$

und $\frac{2c - d}{n} = \frac{29 \times 2 - 10}{12} = 4$

also ist $x = 21 + 4 = 25$.

Man gebe den Buchstaben einen andern Wehrt.

Z. B. $a = 8$
$b = 5$
$c = 11$
$d = 4$
$n = 3$

so ist $ab = 40$

$$\frac{2c - d}{n} = 6,$$

also $x = 40 + 6 = 46$.

Setzen wir aber, die Buchstaben behielten den erstern Wehrt, und die Gleichung wäre

$$x = \frac{abc + b}{n + d}$$

so ist $x = \frac{3 \times 7 \times 29 + 7}{12 + 10} = 28$.

Erklärung.

§. 173. Eine Aufgabe ist **unmöglich**, wenn die darin angenommene Bedingungen einen Wiederspruch enthalten, ist dieses aber nicht, so ist die Aufgabe **möglich**. Dieser Wiederspruch der Bedingungen aber fält nicht allezeit so gleich in die Augen, sondern entdecket sich öfters erst bei Auflösung der Aufgabe selbsten, wenn der Wehrt der unbekanten Grösse nicht anders als verneinend ausfält, oder in einer unmöglichen Wurzel bestehet §. 122.

Z. B. Man wolte eine Zahl finden, die mit 4 dividiret eben so gros wäre, als wenn man 2 zu ihr addiret hätte. Wenn man nun diese gesuchte Zahl x nennet, so wird vermöge der Bedingung $\frac{x}{4} = x + 2$, folglich $\frac{x}{4} - 2 = x$, und $x - 8 = 4x$, endlich $- 8 = 3x$, oder $\frac{-8}{3} = x$, welches unmöglich, und ein Nichts.

Da die blosse Kentnis der Regeln der Algebra wenig Nutzen bringen würde; wenn man nicht

durch

durch eine wiederholte Uebung eine Fertigkeit darin erhalten hätte, so wollen wir gegenwärtig verschiedene Aufgaben vorlegen, um durch Auflösung derselben die Anwendung der bisher gegebenen Regeln gelauffig zu machen.

Erste Aufgabe.

§. 174. Ein Officier hat 119 Mann angeworben, welche gerade hinreichend sind 3 Compagnien volzählig zu machen. Jedoch da der Abgang der ersten derselben gänzlich unbekant ist, so weis man von den übrigen beiden nur so viel, daß die zwote so viel als die erste und noch 2 Mann mehr, und die dritte doppelt so viel als die erste, weniger 11 Mann bekommen müsse, um volzählig zu werden. Es frägt sich demnach, wie viel einer ieden Compagnie zugeteilet werden müssen?

Auflösung. 1. Unterscheidet die bekante Grössen von den unbekanten und benennet sie nach §. 127.

Es sei demnach die Anzahl der Neugeworbenen .... $= a$
Die 2 Mann .... $= b$
Die 11 Mann .... $= c$
Der Abgang der ersten Compagnie $= x$
der zwoten .... $= x + b$
der dritten .... $= 2x - c$

2. Hierauf formiret die Gleichung nach den gegebenen Bedingungen, welche bestimmen,

daß

daß der Abgang aller dreien Compagnien der Anzahl der Neugeworbenen gleich sei; folglich bekomt ihr $x + x + b + 2x - c = a$.

3. Reduciret diese Gleichung nach §. 169. nehmlich $x + x + b + 2x - c = a$ durch die Versetzung, das ist $4x = a - b + c$ und $x = \frac{a - b + c}{4}$ durch die Division.

4. Drücket diesen gefundenen Wehrt von x in Zahlen aus.

$\frac{a - b + c}{4} = \frac{119 + 11 - 2}{4} = \frac{128}{4} = 32 = x$. Folglich

$32 = x$ Abgang der ersten

$32 + 2 = 34 = x + b$ Abgang der zwoten

$2 \times 32 - 11 = 53 = 2x - c$ Abgang der dritten Compagnie

$119 = a$ Summe der angeworbenen.

Zweite Aufgabe.

§. 175. Es ist ein Courier vor 3 Tagen aufgebrochen, der des Tages 16 Meilen zurück legt; heute wird ihm ein anderer nachgeschickt, so aber täglich 18 Meilen macht; es wird gefragt, wann der leztere den erstern einholen werde.

Auf-

Auflösung. Es sei die Tagreise
Des ersten von 16 Meilen. . . . . $= a$
Des andern von 18 Meilen. . . . . $= b$.
Die Zeit von 3 Tagen, so der erstere
voraus hat. . . . . $= c$
Die Zeit des Einholens. . . . . $= x$

So ist der Weg, den der erste Courier vor dem Aufbruche des andern gemacht hat $= ac$, und der Weg den er seit diesem Aufbruche bis zur Zeit des Einholens noch machen wird $= ax$. Der ganze Weg des andern Couriers bis zum Zusammentreffen ist $= bx$. Da nun beide einerlei Weg zu machen haben, so entstehet daraus die Gleichung

$$ac + ax = bx$$

versezt $ac = bx - ax$

dividirt $\frac{ac}{b - a} = x$

Da nun $ac = 48$ und $b - a = 2$, so ist $\frac{ac}{b - a} = \frac{48}{2} = 24 = x$.

Dritte Aufgabe.

§. 176. Es sei umgekehrt die Tagreise des ersten Couriers samt der Zeit da der andere später aufbricht, und die Zeit wann der leztere den erstern einholen sol, gegeben, man

wil

wil daraus den Weg, so der leztere täglich zurück legen mus, finden.

Auflösung. Es sei wiederum die Tagreise des ersten .... $= a$

Die Zeit, so er voraus hat ..... $= c$

Die gegebene Zeit des Einholens .. $= b$

Die gesuchte Tagreise des leztern .. $= x$

So ist der ganze Weg des ersten bis zur Einholungszeit $= ac + ab$ und der Weg des leztern $= bx$. Folglich

$$ac + ab = bx$$

$$\text{Divid. } \frac{ac + ab}{b} = x$$

Wenn die Buchstaben die vorige Bedeutung haben, so wird $\frac{ac + ab}{b} = \frac{48 + 384}{24} = \frac{432}{24} = 18.$

Da diese Auflösungen algemein sind, was man auch den bekanten Grössen für eine Bedeutung giebt, und in was für Nebenumstände man sie versezet, so wollen wir die Aufgabe so ausdrücken: Es solle einem Deserteur, der vor 2 Tagen entwichen ist, und täglich 5 Meilen zurück legt, nachgesezet werden, iedoch so, daß man ihn den 6ten Tag einholen könne, weil er sonsten schon über die Gränzen sein würde; es wird also gefragt, wie viel Meilen täglich beim Nachsezen zurück gelegt werden müssen? In diesem Falle

wird nun a = 5, c = 2, b = 6, folglich

$$\frac{ac + ab}{b} = x = \frac{10 + 30}{6} = 6\tfrac{2}{3} \text{ Meilen.}$$

Vierte Aufgabe.

§. 177. Ein Oberfeuerwerksmeister hat 2. ℔ Brandröhrensatz, der in einer gewissen Gattung von Brandröhren 30 Tempi brennet, und 1 ℔ von einer andern Art, so in eben dieser Brandröhren nur 24 Tempi aushält: es entsteht die Frage: wenn beide Sätze zusammen gemischet werden, wie viel Tempi alsdann diese Vermischung brennen werde.

Auflösung. Es sei die Menge des ersten Satzes von 2 ℔ . . . . = a
Dessen 30 Tempi . . . . = b
Die Menge des zweiten von 1 ℔ . . . = c
Und seine 24 Tempi . . . . = d
Die Menge beider Sätze zusammen gemischt . . . . = a + c
Die Anzahl Tempi, so die Vermischung brennen wird . . . . = x

Wenn man nun die Menge der Sätze durch ihre Tempi multipliciret, so kan man diese Produkte als die Würkungen der Sätze ansehen, und bekomt daher für die Würkung des ersten ab, des zweiten cd, und der Vermischung ax + cx. Da aber die Würkungen des ersten und zweiten gleich sein müssen der

Wür-

Würkung der Vermischung, so erhalten wir folgende Gleichung

$$ab + cd = ax + cx$$

Dividirt $\frac{ab + cd}{a + c} = x =$

$\frac{60 + 24}{2 + 1} = \frac{84}{3} = 28$ Tempi.

Fünfte Aufgabe.

§. 178. Ein Oberfeuerwerksmeister hat zweierlei Brandröhren-Sätze; der erste von 64 Loht brennet 30 Tempi, der andere hält in einer gleichförmigen Brandröhre nur 24 Tempi aus, er sol aber aus beiden einen machen, der 28 Tempi brennet. Wie viel Loht sind demnach von dem leztern dem ersten zuzusetzen, daß die Mischung nach Verlangen brenne?

Auflösung. Es sei die Anzahl Tempi des ersten Satzes. . . . . . . $= a$.
Des zweiten. . . . . $= b$
Und die Anzahl Tempi, so die Vermischung brennen sol. . . . . $= c$.
Die Menge des ersten Satzes. . $= d$
Die Menge des zweiten, so den ersten zugesezt werden mus. . $= x$
So ist die Menge der Vermischung. $= d + x$

Es mus daher die Würkung des ersten Satzes samt dem Zusatze vom zweiten = $ad + bx$ gleich sein der Würkung der Vermischung = $cd + cx$

daher ist $ad + bx = cd + cx$
versezt $ad - cd = cx - bx$
dividirt $\frac{ad - cd}{c - b} = x$

$\frac{ad - cd}{c - b} = x = \frac{1920 - 1792}{28 - 24} = \frac{128}{4} =$ 32 Loht.

Sechste Aufgabe.

§. 179. Ein Artillerie-Officier wird gefragt, wie stark sein Commando sei? Er giebt zur Antwort: $\frac{1}{3}$ von seinen Leuten schlage Brandröhren, $\frac{2}{5}$ sind beim Bombenfüllen, $\frac{1}{6}$ trage solche ab und zu; 4 Mann machen Brandzeug; und endlich 2 davon befinden sich im Spital. Es fragt sich: wie stark eigentlich das Commando sei?

Auflösung. Man benenne das ganze Commando. . . . . = x

So ist die Zahl der Brandröhrenschläger. . . . . = $\frac{x}{3}$

Der Bombenfüller. . . . . = $\frac{2x}{5}$

Der

Der Zutrager. . . . . $= \frac{x}{6}$
Die 4 Mann beim Brandzeugmachen. $= a$
Und die 2 im Spital. . . . . . $= b$

Da nun alle diese Teile zusammen genommen dem Ganzen gleich sein müssen, so bekommen wir die Gleichung

$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{6} + a + b = x.$$

Bringt man diese Brüche zu einer Benennung, so hat man

$$\frac{30x + 36x + 15x}{90} + a + b = x \text{ oder}$$

$$\frac{81x}{90} + a + b = x$$

$$81x + 90a + 90b = 90x$$

$$90a + 90b = 90x - 81x = 9x$$

$$10a + 10b = x = 10 \times 4 + 10 \times 2 = 60$$

Mann

Um sich zu überzeugen, oder um die Probe zu machen, daß die Auflösung mit den Bedingungen der Aufgabe übereinstimme, so betrachte man, daß $\frac{x}{3} = \frac{60}{3} = 20$ der Anzahl der Brandröhrenschläger, $\frac{2x}{5} = \frac{120}{5} = 24$

den Bombenfüllern, $\frac{x}{6} = \frac{60}{6} = 10$ den Zuträgern, $a = 4$ den beim Brandzeug angestellten, und $b = 2$ den Kranken; und daß alle diese zusammen genommen die Zahl der 60 Mann ausmachen.

Drittes Hauptstück.

Von Auflösung der Aufgaben mit mehrern unbekanten Grössen.

Aufgabe.

§. 179.

Eine Aufgabe mit mehrern unbekanten Grössen aufzulösen.

Auflösung. 1. Suchet aus den gegebenen Bedingungen so viele besondere Gleichungen zu formiren, als unbekante Grössen gegeben sind. Denn da von einer ieden unbekanten Grösse der hinreichende Grund in einer Gleichung enthalten ist, §. 165. so würde sie nicht gefunden und berechnet werden können, wenn nicht von den leztern eben so viele vorhanden wären, als von den erstern. Ist aber dieses unmöglich, so ist es ein Zeichen, daß die

Be-

Bedingungen der Aufgabe nicht hinlängliche Merkmale zu Ersindung des gesuchten enthalten, und die Aufgabe unbestimt sei §. 170.

2. Suchet nach den Regeln der Reduktion §. 169. zuerst den Wehrt einer unbekanten Grösse allein, und schaffet solche hierauf aus allen übrigen Gleichungen weg; welches vornehmlich auf eine doppelte Art geschehen kan.

a. Wenn ihr an den Platz dieser unbekanten Grösse in den übrigen Gleichungen den blossen Wehrt derselben setzet, und substituiret, §. 5. Num. 2. so verschwindet solche. Oder

b. Wenn ihr die Wehrte dieser unbekanten Grösse mit einander vergleichet, und daraus eine neue Gleichung formiret §. 5. Num. 3. so ist sie ebenfals nicht mehr vorhanden.

3. Fahret auf diese Art stuffenweise fort, bis ihr solche Gleichungen bekomt, in welcher nur eine einzige unbekante Grösse enthalten ist, deren Wehrt ihr nunmehro nach §. 169. auf die gewöhnliche Art in lauter bekanten Grössen findet.

4. Diesen Wehrt substituiret nunmehro in allen den übrigen Gleichungen, worin diese unbekante Grösse enthalten ist, so findet ihr nach und nach jede derselben in lauter bekanten Grössen, und die Aufgabe ist aufgelöset.

Wenn der Wehrt einer gefundenen Grösse zu sehr zusammen gesetzet sein solte, als daß sie in den übrigen Gleichungen ohne Weitläuftigkeit und Unbequemlichkeit in der Rechnung substituiret werden könte, so benennet sie lieber mit einem besondern Buchstaben, welches nunmehro ohne Schwürigkeit geschehen kan, da sie bereits gefunden ist, folglich nicht mehr als unbekant angesehen werden darf.

Da indessen alle diese Regeln ohne Uebung und Anwendung sehr unverständlich bleiben würden, so wollen wir zuerst einige Beispiele davon anführen, ehe wir zu den würklichen Aufgaben fortschreiten.

Erstes Beispiel.

Man hätte folgende zwo Gleichungen,

$2x + y = a$,

und $5x + 3y = b$,

aus welchen x und y gefunden werden solte.

Erste Art. Suchet in der ersten Gleichung nach §. 169. den Wehrt von x, nehmlich $2x + y = a$,

so ist $2x = a - y$

und $x = \frac{a - y}{2}$.

Setzet nunmehro in der zwoten Gleichung anstaat x dessen gefundenen Wehrt, so bekomt ihr anstaat

$$5x + 3y = b$$

die Gleichung $\frac{5a - 5y}{2} + 3y = b$,

worin also das x bereits weggeschaft worden, und nur noch das einzige y übrig ist, so ihr auf die gewöhnliche Art in lauter bekanten Grössen findet, nehmlich

$$5a - 5y + 6y = 2b$$

oder $5a + y = 2b$,

folglich $y = 2b - 5a$.

Um nun auch noch den Wehrt von x in bekanten Grössen zu finden, so setzet in der Gleichung

$x = \frac{a - y}{2}$ den Wehrt von y,

so habt ihr $x = \frac{a - 2b + 5a}{2}$.

Zweite Art. Suchet aus beiden gegebenen Gleichungen

$$2x + y = a$$

und $5x + 3y = b$, den Wehrt von x besonders, so bekomt ihr aus der ersten $x = \frac{a - y}{2}$,

und aus der andern $x = \frac{b - 3y}{5}$.

Setzet nunmehro aus diesen beiden Wehrten eine neue Gleichung zusammen, nehmlich

$$\frac{a - y}{2} = \frac{b - 3y}{5},$$

worin das x verschwunden, und nur y allein noch übrig ist, so ihr durch die gewöhnliche Reduktion findet,

nehmlich $5a - 5y = 2b - 6y$

und $6y - 5y = 2b - 5a$,

oder $y = 2b - 5a$ wie vorhero.

Zweites Beispiel.

Es wären zwo Gleichungen

$$\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = a,$$

und $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = b$ gegeben, um daraus x und y zu finden.

Erste Art. Weil $\frac{4x}{5} - \frac{5y}{6} = a$, so suchet den Wehrt von x daraus,

nehmlich $4x - \frac{25y}{6} = 5a$,

und $24x - 25y = 30a$,

folglich $24x = 30a + 25y$,

und $x = \frac{30a + 25y}{24}$.

Hierauf substituiret diesen gefundenen Wehrt von x, in der andern Gleichung

$$\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = b$$

so

so bekomt ihr $\frac{60a + 50y}{72} + \frac{3y}{4} = b$,

ferner $60a + 50y + \frac{216y}{4} = 72b$

und $240a + 200y + 216y = 288b$.
Hierauf $416y = 288b - 240a$,

und endlich $y = \frac{288b - 240a}{416}$.

Wollet ihr hieraus nun auch das x finden, so müsset ihr in der Gleichung $x = \frac{30a + 25y}{24}$ den gefundenen Wehrt von y substituiren. Da solches aber die Rechnung ohne Noht nur weitläuftig machen würde, so nennet das nunmehr bekante $y = c$ so habt ihr

$$x = \frac{30a + 25c}{24},$$

Zweite Art. Suchet aus beiden gegebenen Gleichungen den Wehrt von x, nehmlich aus der ersten wie vorher $x = \frac{30a + 25y}{24}$

und aus der andern $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{4} = b$

bekomt ihr $2x + \frac{9y}{4} = 3b$,

fer-

ferner $8x + 9y = 12b$,
und $8x = 12b - 9y$,
endlich $x = \frac{12b - 9y}{8}$.

Nunmehro saget:

$$\frac{30a + 25y}{24} = \frac{12b - 9y}{8},$$

$$30a + 25y = \frac{288b - 216y}{8}$$

$$240a + 200y = 288b - 216y$$

$$416y = 288b - 240a$$

$$y = \frac{288b - 240a}{416}$$ wie vorhero.

Drittes Beispiel.

Es wären die zwo Gleichungen
$ax - by + cy = m$
und $dx + fy = n$ gegeben,
daraus x und y zu finden.

Erste Art. Weil $ax - by + cy = m$, so ist $ax = m + by - cy$
und also $x = \frac{m + by - cy}{a}$.

Wenn ihr nun in der andern Gleichung anstaat x seinen Wehrt setzet, so bekomt ihr

$$\frac{dm + bdy - dcy}{a} + fy = n$$

folglich $dm + bdy - dcy + afy = an$

$$bdy - dcy + afy = an - dm$$

$$y = \frac{an - dm}{bd - dc + af}$$

woraus hernach x leicht zu finden ist.

Zweite Art. Weil $dx + fy = n$, so ist $dx = n - fy$,

und daher ist $x = \frac{n - fy}{d}$,

und vorhero war $x = \frac{m + by - cy}{a}$

folglich ist $\frac{m + by - cy}{a} = \frac{n - fy}{d}$

$$m + by - cy = \frac{an - afy}{d}.$$

$$dm + bdy - cdy = an - afy$$

$$dm + bdy - cdy + afy = an$$

$$bdy - cdy + afy = an - dm$$

$y = \frac{an - dm}{bd - cd + af}$ wie vorhero.

Viertes Beispiel.

Kommen in einer Aufgabe drei unbekante Grössen vor, und man kan eben so viele Gleichungen formiren, so schaffet man, wie vorher, eine

eine unbekante Grösse nach der andern bis auf eine Weg, und bestimmet hierauf ihren Wehrt.

Man setze die drei Gleichungen wären:

$$2x + 4y + 6z = a$$
$$7x + 2y - z = b$$
$$4x - y + 2z = c$$

Erste Art. Aus der ersten Gleichung

$$2x + 4y + 6z = a$$

suchet den Wehrt von x, den ihr findet

$$x = \frac{a - 4y - 6z}{2}.$$

Diesen gefundenen Wehrt substituiret in der andern Gleichung

$7x + 2y - z = b$ anstaat x, so bekomt ihr

dafür $\frac{7a - 28y - 42z}{2} + 2y - z = b$

woraus ihr nunmehro den Wehrt von y suchet, nehmlich

$$\frac{7a - 44z - 2b}{24} = y.$$

Nunmehro substituiret in der dritten Gleichung $4x - y + 2z = c$, sowohl den Wehrt von x als auch von y, so bekomt ihr

$$\frac{4a - 24z}{2} - \frac{112a + 704z + 32b}{48}$$
$$- \frac{7a + 44z + 2b}{24} + 2z = c,$$

wor-

woraus ihr findet $\frac{30a + 48c - 36b}{312} = z$, dessen Wehrt in lauter bekanten Grössen gefunden ist, und den ihr daher $= m$ nennen könnet; setzet ihr nun in der Gleichung
$\frac{7a - 44z - 2b}{24} = y$ anstaat $z = m$ so bekomt ihr gleichfals y in lauter bekanten Grössen, nehmlich $\frac{7a - 44m - 2b}{24} = y = n$;
und endlich, wenn ihr in der Gleichung
$x = \frac{a - 4y - 6z}{2}$ anstaat y und z ihre Werthe n und m setzet,
so bekomt ihr $x = \frac{a - 4n - 6m}{2}$; folglich sind die Wehrte aller drei gesuchten Grössen bekant, und die Aufgabe ist aufgelöset worden.

Zweite Art. Suchet aus ieder der gegebenen Gleichungen den Wehrt von x,
so bekömt ihr aus der ersten $x = \frac{a - 4y - 6z}{2}$
aus der zwoten $x = \frac{b - 2y + z}{7}$,
und aus der dritten $x = \frac{c + y - 2z}{4}$.
Aus den beiden ersten machet nun eine neue Gleichung und suchet daraus den Wehrt von y, nehmlich:

$$\frac{a - 4y - 6z}{2} = \frac{b - 2y + z}{7}$$

$$7a - 28y - 42z = 2b - 4y + 2z$$

$$7a - 42z - 2b - 2z = 28y - 4y$$

$$7a - 44z - 2b = 24y$$

$$\frac{7a - 44z - 2b}{24} = y$$

Auf eben diese Art machet aus dem ersten und dritten Wehrte von x eine neue Gleichung, und suchet daraus gleichfals den Wehrt von y, nehmlich

$$\frac{a - 4y - 6z}{2} = \frac{c + y - 2z}{4}$$

$$4a - 16y - 24z = 2c + 2y - 4z$$

$$4a - 24z - 2c + 4z = 2y + 16y$$

$$4a - 20z - 2c = 18y$$

$$\frac{4a - 20z - 2c}{18} = y.$$

Aus diesen beiden Wehrten von y wird abermals eine Gleichung formiret, und z gesucht, nehmlich:

$$\frac{7a - 44z - 2b}{24} = \frac{4a - 20z - 2c}{18}$$

$$126a - 792z - 36b = 96a - 480z - 48c$$

$$126a - 36b - 96a + 48c = 792z - 480z$$

$$30a - 36b + 48c = 312z$$

$$\frac{30a - 36b + 48c}{312} = z$$

in

in welcher Gleichung sowohl x als y wegge-schaft worden, und der Wehrt von z in lauter bekanten Grössen erscheinet.

Wenn man nun $z = m$ setzet, und in dem Wehrte von

$$y = \frac{4a - 20z - 2c}{18}$$ anstaat $20z = 20m$

setzet,

so bekomt man $y = \frac{4a - 20m - 2c}{18}$; und

endlich wenn man nunmehro $y = n$ setzet, und

in der Gleichung $x = \frac{c + y - 2z}{4}$ anstaat

y und z, ihren Wehrt n und m setzet,

so bekomt ihr $x = \frac{c + n - 2m}{4}$.

Folglich sind alle drei gesuchte unbekante Grössen nunmehro in lauter bekanten gefunden worden.

Da in dergleichen Fällen nach der ersten Art die Substitutionen der Wehrte schon sehr beschwerlich und weitläuftig fallen, so ist mehrenteils die zweite Art derselben vorzuziehen.

Zusatz.

§. 180. Bisweilen lassen sich auch die unbekante Grössen unmittelbar durch die Addition oder Subtraktion der Gleichungen weg-

schaffen, wann nehmlich die unbekante Grösse in beiden einen gleichen Coefficienten hat.

3. B. Man hätte $4x + 2y = a$,
und $4x - y = b$.

Ziehet man nun die leztere von der erstern ab, so verbleibet $3y = a - b$ §. 56. Num. 2 wo x nicht mehr erscheinet, und der Wehrt von $y = \frac{a - b}{3}$ bestimt ist, x aber bekomt man, wenn man in der Gleichung $4x - y = b$ anstaat y den Wehrt davon sezet,

nehmlich $4x - \frac{a + b}{3} = b$,

folglich $12x - a + b = 3b$,

und $12x = 3b + a - b = a + 2b$.

Daher ist $x = \frac{a + 2b}{12}$.

Zusatz.

§. 181. So wie die Aufgaben mit drei unbekanten Grössen aufgelöset werden, eben so wird auch verfahren, wenn deren vier und mehrere vorhanden sein solten. Bisweilen ereignet es sich auch, daß zwar eben so viele Gleichungen gemacht werden können, als unbekante Grössen in der Aufgabe vorkommen, und dennoch solche dadurch sich nicht wegschaffen lassen, indem man zulezt eine identische Gleichung, d. i. von einerlei Gliedern enthält. Dieses ist alsdenn ein Zeichen, daß die zu Anfangs

fangs angenommene Gleichungen nicht gänzlich unabhängig von einander, sondern eine schon in der andern begriffen gewesen; folglich auch nicht in der That die gehörige Zahl der Gleichungen gemacht werden können. Ein solcher Fal gehöret alsdann zu den unbestimten Aufgaben, wobei mehrere Auflösungen möglich sind §. 170.

Erste Aufgabe.

§. 182. Es befindet sich in zwo Festungen eine unbekante Anzahl Geschütz; nur so viel weis man, daß wenn aus der ersten in die andere 15 Stück abgegeben werden, die leztere doppelt so viel und noch 17 mehr als die erste habe. Führet man aber aus der andern in die erste 12 Stück, so hat die erste um zwei mehr als die andere. Man verlangt zu wissen, wie viel Stuck sich in ieder Festung befinden.

Auflösung. Es sei die Anzahl Geschütz der ersten Festung . . . . $= x$
Der zwoten . . . . $= y$
Die Zahl 15 . . . . $= a$
17 . . . . $= b$
12 . . . . $= c$
und 2 . . . . $= d$

Aus den Bedingungen der Aufgabe erhellet, daß $x - 15 = y + 15$,

 und

und in diesem Falle $y + 15 = 2x - 30 + 17$.
Ferner daß $y - 12 = x + 12 - 2$,
folglich bekomt man folgende zwo Gleichungen:

$$y + a = 2x - 2a + b$$
$$y = 2x - 3a + b$$
und $$y - c = x + c - d$$
$$y = x + 2c - d$$

daher ist $2x - 3a + b = x + 2c - d$
$$x = 3a - b + 2c - d$$

setzet man nun den Wehrt von x in der zwoten Gleichung anstaat x,
so hat man $y = 3a - b + 2c - d + 2c - d$
das ist $y = 3a - b + 4c - 2d$
daher ist $x = 45 + 24 - 17 - 2 = 50$
und $y = 45 + 48 - 17 - 4 = 72$

Probe.

Denn $72 + 15 = 100 - 30 + 17 = 87$
und $72 - 12 = 50 + 12 - 2 = 60$

Zweite Aufgabe.

§. 183. Es befinden sich auf einer Batterie zweierlei Stuckkugeln, deren eigentlicher Kaliber unbekant ist, nur weis man, daß 10 vom stärkern und 23 vom schwächern Kaliber zusammen 654 ℔ ausmachen; ferner daß 16 vom stärkern und 34 vom schwächern wiederum 996 ℔ an Gewicht betragen. Man verlangt

langt das Gewicht von iedem Kaliber zu finden.

Auflösung. Es sei das Gewicht von

654 ℔ . . . . = a

Von 996 ℔ . . . . = b

Das Gewicht der schwerern Kugel. . . . = x

Der geringern. . . . . = y

so ist $10x + 23y = a$

$$10x = a - 23y$$

$$x = \frac{a - 23y}{10}$$

und $16x + 34y = b$

$$16x = b - 34y$$

$$x = \frac{b - 34y}{16}$$

daher ist $\frac{a - 23y}{10} = \frac{b - 34y}{16}$

$$16a - 368y = 10b - 340y$$

$$16a - 10b = 368y - 340y$$

$$16a - 10b = 28y$$

$$\frac{16a - 10b}{28} = y$$

Nennet man $y = m$, so ist nach der ersten Gleichung

$$x = \frac{a - 23m}{10}$$

$16a = 10464$,

und $10b = 9960$,

daher $16a - 10b = 504$

folglich $y = 18$
$a = 654$, $23m = 414$
folglich $\frac{a - 23m}{10} = 24 = x$.

Dritte Aufgabe.

§. 184. Ein Böller, dessen Metal aus Kupfer und Zinn zusammen gesetzet ist, und im Cubik-Maasse 2 Schuh $\frac{20}{100}$ enthält, wieget 1341 ℔. Man weis ferner, daß der Cubikschuh Kupfer 620 ℔, und der von Zinn 505 ℔ schwer ist; Es frägt sich also: aus wie viel Kupfer und Zinn der Böller bestehe?

Auflösung. Es sei das Cubikmaas des ganzen Böllers von $2\frac{20}{100}$ . . . . $= a$
Das Gewicht desselben von 1341 ℔. . . $= b$
Das Gewicht eines Cubikschuhes Kupfer von 620 ℔. . . . . $= c$
Zinn von 505 ℔. . . . . $= d$
Das in dem Böller enthaltene Cubikmaas von Kupfer. . . . . $= x$
Von Zinn. . . . . $= y$

Nun bestehet die Masse oder der kubische Inhalt des Böllers aus der Masse des Kupfers und Zinns zusammen genommen,
und daher ist $x + y = a$.
Ferner das ganze Gewicht des Böllers bestehet aus dem Gewichte so vieler Cubikschuhen,

Kup-

Kupfer und Zinn, als von ieder dieser Materien enthalten sind,
das ist $cx + dy = b$.
Vermöge der ersten Gleichung ist nun

$$x = a - y,$$

und vermöge der andern $x = \frac{b - dy}{c}$.

folglich ist $a - y = \frac{b - dy}{c}$

$$ac - cy = b - dy$$
$$ac - b = cy - dy$$
$$\frac{ac - b}{c - d} = y$$

Um nun auch x zu finden, so setzet in der Gleichung $x = a - y$ anstaat y den Wehrt davon so bekomt ihr

$$x = a - \frac{ac + b}{c - d}$$
$$x = \frac{ac - ad - ac + b}{c - d}$$
$$x = \frac{b - ad}{c - d}.$$

Berechnet man nun diese erhaltene Wehrte in Zahlen, so wird $x = 2$ Cubikschuh, und $y = 0{,}20$ von einem kubischen Schuh.

§. 185. Wenn man die Menge der gemischten Materie allezeit $= a$, ihr Gewicht $= b$, ein gewisses Maas z. B. ein Cubikschuh

oder Zoll, der ersten Materie der Vermischung $= c$ und der zwoten $= d$, endlich die in der Vermischung enthaltene Menge der ersten Materie $= x$ und der andern $= y$ nennet, so lassen sich die zwo lezte Gleichungen

$$x = \frac{b - ad}{c - d}$$

$$\text{und } y = \frac{ac - b}{c - d}$$

als algemeine Formuln zu Auflösung dergleichen Aufgaben von Vermischungen gebrauchen. Denn ac zeiget das ganze Gewicht, welches die ganze Masse haben müste, wenn sie nur aus der ersten Materie allein bestünde, und ad, eben dasselbe, wenn sie blos aus der zwoten verfertiget wäre; $c - d$ ist der Unterschied des Gewichts der beiden Materien. Derowegen kan man die arithmetische Regel, dergleichen aus zwo Materien bestehende Vermischungen zu berechnen, folgendergestalt ausdrücken: Um die Menge der ersten Materie zu finden, mus von dem ganzen Gewicht der Masse dasienige Gewicht abgezogen werden, so sie haben würde, wenn sie nur aus der zwoten Materie allein bestünde; der Ueberrest wird mit dem Unterschiede der Schwere beider Materien dividiret.

Um die Menge der zwoten Materie zu finden, mus das ganze Gewicht der Masse, von dem-

demienigen, so sie haben würde, wenn sie nur aus der ersten Materie allein bestünde, abgezogen, und der Ueberrest wiederum durch den Unterschied der Schwere beider Materien dividiret werden.

Diese Rechnung wird in den gemeinen Rechenbüchern die Regula Allegationis genennet, worin zwar mehrenteils sehr weitläuftige Beschreibungen derselben, aber keine Gründe des Verfahrens dazu enthalten sind.

Viertes Hauptstück.

Von der Auflösung unbestimter Aufgaben.

§. 186.

Da in einer bestimten Aufgabe der Wehrt der gesuchten Grösse unveränderlich ist, und nur einer allein zukommen kan, bei den unbestimten hingegen eine Eigenschaft von mehrern ist §. 170. so ist bei den leztern in den Bedingungen kein hinreichender Grund zu Erfindung einer unbekanten Grösse enthalten, und folglich können in derselben nicht eben so viele unabhängige Gleichungen formiret werden, als Grössen gesuchet werden. Alle dieieni-

ienige unbekante Grössen demnach, von welchen keine eigene und von den andern gänzlich unterschiedene Gleichungen angegeben werden können, sind wilkührlich, und können nach Belieben und nach Verhältnis der Umstände angenommen werden. Bei deren Wahl man übrigens nur noch auf folgende Stücke Acht zu geben hat.

1. Daß dadurch nicht etwan der Wehrt einer andern unbekanten Grösse, so dadurch bestimt wird, negativ ausfalle, und

2. Daß sie ohne Bruch erscheine, besonders in dem Falle wenn die Natur der Sache selbst keinen Bruch dabei verstattet; wozu man demnach so lange Versuche anstellen mus, bis man eine Grösse erwählet hat, die in aller Absicht dem vorhabenden Endzwecke ein Genüge leistet.

Erste Aufgabe.

§. 187. Es sind 312 Centner Bruchmetal vorhanden, woraus zweierlei Gattungen von Stucken gegossen werden sollen. Die von der ersten Gattung sollen iedes 6 Centner, die von der andern aber iedes 16 Centner im Gewichte enthalten. Es frägt sich wie viel Stücke von ieder Gattung daraus können erzeuget werden.

Auf-

Auflösung. Es sei der Vorrath von 312 Centen Bruchmetal. . . . . $= a$
Das Gewicht der ersten Gattung der Stucken von 6 Centen. . . . . . . $= b$
Der zwoten von 16 Centner. . . . . $= c$
Die Anzahl der ersten Stücken. . . . . . . $= x$
Der andern. . . . . $= y$

Vermöge der Bedingung mus die Anzahl beider Gattungen von Stucken durch ihr zugehöriges Gewichte multipliciret, den ganzen Vorraht von Bruchmetal ausmachen.

Folglich ist $bx + cy = a$

$$bx = a - cy$$

$$x = \frac{a - cy}{b}$$

Oder auch $bx + cy = a$

$$cy = a - bx$$

$$y = \frac{a - bx}{c}$$

Da nun aus den Bedingungen der Aufgabe nur diese einzige Gleichung formiret werden kan, obgleich zwo unbekante Grössen vorhanden sind, so ist die Aufgabe unbestimt, und es kan eine oder die andere der unbekanten Grössen nach Wilkühr angenommen werden. Erwählet man y dazu, so wird x dadurch bestimt, und so auch umgekehrt.

z. B. Es sei $y = 8$.

so ist $x = \frac{312 - 128}{6} = 30\frac{2}{3}$.

Da aber diese Zahl wegen des Bruchs unschicksam ist, so erwähle man $y = 9$

so wird $x = \frac{312 - 168}{6} = 28$.

Im Gegenteile, wenn man x willkührlich annimt,

so wird $y = \frac{a - bx}{c}$. Es sei also $x = 12$

so ist $y = \frac{312 - 72}{16} = 15$.

Weil die Aufgabe mehrerer Auflösungen fähig ist, so kan man für eine der unbekanten Grössen z. B. für y so viele Zahlen annehmen, als nur möglich ist, ohne daß x verneinend, oder mit einem Bruch behaftet werde. Wenn daher $y = 18$ angenommen wird,

so ist $x = \frac{312 - 288}{6} = 4$.

Dieses ist zugleich die gröste Zahl so für y angenommen werden kan, denn wolte man $y = 19$ setzen, so würde $x = 1\frac{1}{3}$, und wolte man $y = 20$ nehmen, so würde $x = -1\frac{1}{3}$ das ist negativ, weil 20×16 nehmlich die eine Gattung von Stucken allein schon den ganzen Vorraht von Bruchmetal übersteigen würde.

Wenn noch eine andere Bedingung in dieser Aufgabe ausgedrückt wäre, z. B. die erste Gattung von Stucken solte um 8 Stuck mehr haben als die andere, so wäre sie nicht mehr unbestimt, und nur einer Auflösung fähig. Denn die zwote Gleichung würde sein $x - 8 = y$, wornach

dann

dann die Aufgabe nach den Regeln des vorigen Hauptstücks aufzulösen wäre.

Zweite Aufgabe.

§. 188. Es sollen von 34 Centner 80 ℔ Pulver 1080 Stuck-Patronen von dreierlei Kaliber verfertiget, und die 24 ℔igen mit 8 ℔, die 12 ℔igen mit 4 ℔ und die 6 ℔igen mit 2 ℔ Pulver gefüllet werden; man wil wissen, zu wie viel Patronen von iedem der drei Kalibern dieses Pulver hinreichend sei?

Auflösung. Es sei das vorhandene Pulver von 34 Centner 80 ℔. .... = a
Die Anzahl der zu verfertigenden Patronen, 1080. .... = b
Die Ladung der ersten Gattung 8 ℔.. = c
Der zwoten 4 ℔. .... = d
Der dritten 2 ℔. .... = e
Die Anzahl der 24 ℔igen Patronen. = x
Der 12 ℔igen. .... = y
Der 6 ℔igen. .... = z

In der Aufgabe selbsten sind nur zwo Bedingungen enthalten, nehmlich

1. Daß die 24 ℔ige, 12 ℔ige, und 6 ℔ige Patronen zusammen genommen der Zahl 1080 gleich sein müssen; und

2. Daß die Anzahl der dreierlei Gattungen Patronen, iede mit ihrer zugehörigen Ladung multipliciret, zusammen genommen gerade die vorhandene 34 Centner 80 ℔ Pulver ausmachen müssen. Da aber hieraus nur zwo

Glei-

Gleichungen entstehen können, und doch drei unbekante Grössen vorhanden sind, so ist die Aufgabe unbestimt.

Es ist demnach $x + y + z = b$

$$x = b - y - z$$

Ferner $cx + dy + ez = a$

$$cx = a - dy - ez$$

$$x = \frac{a - dy - ez}{c}$$

daher ist $b - y - z = \frac{a - dy - ez}{c}$

$$bc - cy - cz = a - dy - ez$$

$$bc - cz - a + ez = cy - dy$$

$$\frac{bc - cz - a + ez}{c - d} = y.$$

Wäre nun z bekant, so würde der Wehrt von y durch diese Gleichung schon gefunden sein; da aber die Aufgabe unbestimt ist, so kan man z nach Wilkühr z. B. = 620 annehmen; alsdann wird $\frac{bc - 620c - a + 620e}{c - d} = y$,

das ist

$$\frac{8640 - 4960 - 3480 + 1240}{4} = y = 360.$$

Um noch den Wehrt von x zu finden, so setzen wir in der Gleichung $x = b - y - z$,

an-

anstaat y und z die gefundene Wehrte derselben, so bekomt man

$$x = b - 360 - 620 =$$
$$1080 - 360 - 620 = 100.$$

Es ist klar, daß man anstaat z auch iede von den beiden andern unbekanten Grössen x oder y hätte wilkührlich bestimmen und annehmen können.

Wil man die Probe der Auflösung machen, so darf man nur untersuchen, ob die drei Wehrte der unbekanten Grössen den Bedingungen der Aufgabe ein Genüge leisten, nehmlich

$$x + y + z = b,$$

d. i. $100 + 360 + 620 = 1080$

und $cx + dy + ez = a$

d. i. $800 + 1440 + 1240 = 3480$.

Fünftes Hauptstück.

Von quadratischen Gleichungen und Aufgaben.

Erklärung.

§. 189.

Da in einer quadratischen Gleichung die unbekante Grösse zur zwoten Potenz oder zum Quadrat erhoben worden, §. 167. so enthält

hält sie entweder das **volkommene Quadrat** derselben, worin kein Produkt, woraus dasselbe bestehet, mangelt, §. 128. oder nicht; im leztern Falle wird das Quadrat **unvolkommen** genant, wenn bei einer zwonamigten Wurzel das Quadrat des einen Teils abgeht. Eine Gleichung, so ein solches unvolkommenes Quadrat enthält, heist eine **unreine quadratische Gleichung** (æquatio quadratica impura, adfecta).

Z. B. Die Gleichungen $x^2 = ab$, und $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = bc$ enthalten volkommene Quadrate der Wurzeln x und $x + \frac{a}{2}$. Hingegen die zwo Gleichungen $x^2 + 2ax = cd$ und $x^2 - \frac{2x}{3} = ac$, enthalten unvolkommene Quadrate der Wurzeln $x + a$ und $x - \frac{1}{3}$, weil in beiden das Quadrat des zweiten Teils abgehet; und daher heissen sie unreine quadratische Gleichungen, deren algemeiner Ausdruck ist $x^2 \pm ax = \pm b^2$.

Aufgabe.

§. 190. Zu untersuchen, ob das in einer Gleichung enthaltene Quadrat der unbekanten Grösse volkommen oder unvolkommen sei?

Auflösung. 1. Wenn die unbekante Grösse zum Quadrat erhoben worden, und sonst nicht mehr in der Gleichung erscheinet, so ist sie das Quadrat einer einamigten Wurzel, und daher volkommen.

Z. B. $x^2 + ac = b^2$.

2. Ist die unbekante Grösse nicht nur zum Quadrat erhoben, sondern sie ist auch noch mit einer andern bekanten doppelt genommen multipliciret, und von dieser bekanten ist das Quadrat gleichfals vorhanden, so enthält die Gleichung alle Teile des Quadrats einer zweinamigten Wurzel §. 128. welches daher volkommen ist.

Z. B. $x^2 + 2ax + a^2 = cd$.

Um diese Teile des Quadrats desto leichter zu finden, kan die Gleichung am füglichsten auf Nulle gebracht werden, §. 169. iedoch so daß das Quadrat der unbekanten Grösse positiv werde §. 122.

Z. B. Man hätte die Gleichung

$$ad - 2ax + cd = x^2 + a^2,$$

so setze man: $x^2 + 2ax + a^2 - ad - cd = 0$.

Jedoch ist hiebei noch zu merken, daß um ein volkommenes Quadrat zu erhalten, sowohl das Quadrat des ersten als auch des andern Teils der Wurzel beiahend sein müsse, widrigenfals es allezeit unvolkommen bleibet, wenn auch sonst alle erforderliche Teile vorhanden wären, weil es eine

eingebildete oder unmögliche Wurzel haben würde §. 122.

Z. B. $x^2 + 2bx - b^2$ ist ein unvolkommenes Quadrat weil $x \pm b$ nicht die Wurzel davon sein kan, welche allezeit $b^2 \pm 2bx + b^2$ zum Quadrat geben würde.

3. Im Gegenteile erscheinet zwar die unbekante Grösse nebst ihrem Quadrat noch mit einer bekanten Grösse multipliciret, das Quadrat der Hälfte dieser leztern ist aber nicht vorhanden, so ist das Quadrat allezeit unvolkommen.

Z. B. $x^2 + ax = bc$.

4. Wenn die unbekante Grösse nebst ihrem Quadrat noch einmal ohne mit einer bekanten multipliciret zu sein, auch wohl ohne Coefficienten erscheinet, so hat man nachzusehen, ob von der Hälfte des Coefficienten ein beiahendes Quadrat vorhanden sei, in welchem Falle es dann volkommen ist.

Z. B. Man hätte $x^2 - x + \frac{1}{4} = c^2$, so mus man $-x$ ansehen, als ob $-\frac{1}{2}x$ zweimal vorhanden wäre, und da nun das Quadrat von $\frac{1}{2}$ nehmlich $\frac{1}{4}$ vorhanden ist, so ist das Quadrat volständig. So verhält es sich auch mit $x^2 + 4x + 4 = ac$.

5. Komt

5. Komt die unbekante Grösse ausser ihrem Quadrat in Gestalt eines Bruches vor, so nehme man die Hälfte von diesem Bruche, oder multiplicire den Nenner desselben mit 2. und sehe zu, ob das Quadrat dieser Hälfte vorhanden sei.

Z. B. In der Gleichung

$$x^2 + \frac{2ax}{3} + \frac{a^2}{9} = ab - bc$$

ist das Quadrat volkommen, weil das Quadrat von der Hälfte des einen Faktors $\frac{2a}{3}$ nehmlich von $\frac{a}{3} = \frac{a^2}{9}$ würklich vorhanden ist. Im Gegenteile ist es in $x^2 - \frac{x}{3} = ac$ unvolkommen, weil das Quadrat von $\frac{x}{6}$ abgängig ist.

6. Wenn das Quadrat der unbekanten Grösse einen Coefficienten bei sich führet, so kein Quadrat ist, so kan niemals ein volkommenes Quadrat in der Gleichung sein, wenn auch sonst alle übrige Teile vorhanden wären; Es wäre dann, daß man alle übrige Grössen mit diesem Coefficienten dividirete, und alsdann noch nach den vorigen Regeln ein volkommenes Quadrat in der Gleichung vorhanden wäre.

Z; B. In $6x^2 - 2ax + a^2 = ac$ ist ein unvolkommenes Quadrat.

Aufgabe.

§. 191. Ein unvolkommenes Quadrat in einer Gleichung zu ergänzen.

Auflösung. 1. Bringet alle in der Gleichung vorhandene Teile des Quadrats in ein Glied allein, §. 169.

2. Untersuchet nach dem vorhergehenden §. was für ein Teil dem Quadrate abgängig sei.

3. Dieses setzet alsdann mit dem Zeichen + zu beiden Gliedern der Gleichung hinzu, wodurch das Quadrat ergänzet, und dennoch die Gleichheit erhalten wird §. 56. Num. 1.

Erstes Beispiel.

Es sei die Gleichung $x^2 - ac = 2ax$, so setzet zuerst $x^2 - 2ax = ac$. Da nun noch das Quadrat von $- a$ abgehet, so setzet es beiderseits hinzu, so bekomt ihr

$$x^2 - 2ax + a^2 = ac + a^2;$$

wo alsdann das erste Glied ein volkommenes Quadrat ist, dessen Wurzel $x - a$ oder auch $a - x$.

Zweites Beispiel.

Wenn die Gleichung $ab - x = cd - x^2$ zu ergänzen wäre, so reducire man sie zuvor auf

Nul-

Nulle, iedoch so, daß x^2 beiahend werde, nehmlich $x^2 - x + ab - cd = 0$.
Hierauf bringe man die vorhandene Teile des Quadrats in ein Glied allein, so hat man $x^2 - x = cd - ab$. Da man nun $-x$ ansehen kan, als ob es das doppelte von $-\frac{1}{2}x$ wäre, so mache man von dem Coefficienten $\frac{1}{2}$ das Quadrat, und setze es beiderseits hinzu nehmlich
$x^2 - x + \frac{1}{4} = cd - ab + \frac{1}{4}$ so ist das Quadrat ergänzet.

Drittes Beispiel.

Hätte man in der Gleichung
$4x^2 - \frac{2cx}{3} + c^2 = ab$ das unvolkommene Quadrat zu ergänzen, so setzet zuerst
$4x^2 - \frac{2cx}{3} = ab - c^2$. Da nun $-\frac{2cx}{3}$ als ein doppeltes Produkt von $2x$ in $-\frac{c}{6}$ angesehen werden kan, und das Quadrat des Faktors $-\frac{c}{6}$ abgängig ist, so addire man solches nehmlich $+\frac{c^2}{36}$ beiderseits hinzu, so bekomt man in der Gleichung

$4x^2 - \frac{2cx}{3} + \frac{c^2}{36} = ab - c^2 + \frac{c^2}{36}$ ein vollkommenes Quadrat, wovon die Wurzel $= 2x - \frac{c}{6}$ ist.

Aufgabe.

§. 192. Eine quadratische Aufgabe aufzulösen.

Auflösung. 1. Ergänzet das in der Gleichung enthaltene unvolkommene Quadrat nach §. 191. so daß solches in dem einen Gliede der Gleichung allein stehet; in dem andern aber lauter bekante Grössen enthalten sind.

2. Ziehet aus beiden Gliedern die Quadratwurzel §. 163. Num. 2. welches bei dem ersten würklich geschehen kan; bei dem andern aber nur durch das Wurzelzeichen angedeutet werden mus.

3. Ist die Wurzel des Quadrats zweinamigt, folglich eine bekante Grösse in derselben enthalten, so bringe man sie auf die andere Seite der Gleichung, damit die unbekante Grösse allein zu stehen komme, so ist die Aufgabe aufgelöset §. 172.

Z. B. Man hätte $x^2 - 6x + 9 = ab + 9$
so ist $x - 3 = \sqrt[2]{ab + 9}$
und $x = \sqrt[2]{ab + 9} + 3$

Oder

Oder auch $3 - x = \sqrt{ab + 9}$

folglich $3 - \sqrt{ab + 9} = x$

Weil ein iedes Quadrat $x^2 - 2ax + a^2$ eine doppelte Wurzel, nehmlich $x - a$ und $a - x$ haben kan, so müssen nur die iedesmaligen Umstände der Aufgabe lehren, welche von beiden in iedem Falle angenommen werden müsse.

Erste Aufgabe.

§. 193. Eine gewisse Anzahl Canoniers haben zusammen 529 Stückschus gethan, und man weis, daß ieder derselben so viele Schüsse gethan, als ihrer an der Anzahl vorhanden sind. Man wil hieraus sowohl ihre Anzahl selbsten, als auch die Zahl ihrer Schüsse erfahren.

Auflösung. Es sei die Zahl von 529 Schüssen........................ $= a$

Die Anzahl der Canoniers sowohl als der von iedem geschehenen Schusse. $= x$

Da nun die gesamte Menge der Schüsse heraus komt, wenn die von iedem geschehene Schüsse mit der Zahl der Canoniers multipliciret werden, so ist $x^2 = a$

folglich $x = \sqrt{a} = \sqrt{529} = 23$.

Zweite Aufgabe.

§. 194. Aus der gegebenen Summe zwoer Zahlen und dem Produkte einer Zahl in die andere, die Zahlen selbst zu finden.

Auflösung. Es sei die gegebene Summe . . . . $= a$
Das Produkt . . . . $= b$
Die erste Zahl selbst . . . . $= x$
Die andere . . . . $= y$
so ist $x + y = a$

$$x = a - y$$

und $xy = b$

folglich $x = \frac{b}{y}$

daher ist $a - y = \frac{b}{y}$

$$ay - y^2 = b$$

Da nun alhier das Quadrat von $-y$ verneinend ist, so mus es beiahend gemacht werden, so bekomt man

$$y^2 - ay = -b$$

$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} - b$$

$$y - \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} + \frac{a}{2}$$

Da

Da nun auch $x = a - y$, so ist

$$x = a - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} - \frac{a}{2} =$$

$$\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Es sei $a = 60$, $b = 875$,

so ist $y = \sqrt{900 - 875} + 30 = 35$,

und $x = 30 - \sqrt{900 - 875} = 25$.

Dann $35 + 25 = 60$,

und $35 \times 25 = 875$

Dritte Aufgabe.

§. 195. Es wird iemand gefragt, wie viel er Geld habe? worauf er zur Antwort giebt: wenn man die Anzahl meines Geldes mit sich selbst multipliciret, und hierauf noch 6 mal nimt, so ist die Summe davon = 216. Wie gros ist demnach diese Zahl?

Auflösung. Es sei die Zahl des Geldes $= x$, die Summe $216 = b$

so ist $x^2 + 6x = b$

$$x^2 + 6x + 9 = b + 9$$

$$x + 3 = \sqrt{b + 9}$$

$$x = \sqrt{b + 9} - 3 =$$

$$\sqrt{216 + 9} - 3 = 15 - 3 = 12.$$

Sechster Abschnit.

Von den Verhältnissen.

Erstes Hauptstück.

Von den Verhältnissen überhaupt.

Erklärung.

§. 196.

Die Bestimmung zwoer ähnlicher Grössen durch einander ist eine **Verhältnis** (Ratio, Rapport,) derselben, und die zwo Grössen, deren eine durch die andere bestimmet wird, heissen die **Glieder** der Verhältnis. Nun kan eine Grösse durch eine andere auf eine zwofache Art bestimmet werden, wenn untersuchet wird, 1. um wie viel die eine grösser sei, als die andere, und 2. wie oft die eine derselben die andere enthalte. Folglich entstehen hieraus zwo Hauptgattungen der Verhältnisse, wovon die erstere eine **arithmetische**, die andere aber eine **geometrische Verhältnis** genant wird.

Er-

Erklärung.

§. 197. Dasienige Glied einer Verhältnis, so zuerst gedacht oder ausgesprochen wird, ist das **vordere** (antecedens) das andere aber das **hintere Glied** (consequens). Ist das vordere grösser als das hintere, so ist es eine **abnehmende**, ist aber das Gegenteil, so ist es eine **wachsende** Verhältnis; und beide sind entweder arithmetisch oder geometrisch.

Zusatz.

§. 198. In einer arithmetischen Verhältnis wird bestimt, um wie viel das eine Glied grösser sei, als das andere §. 196. folglich wird der **Unterschied** der Glieder gesucht, so durch die Subtraktion gefunden wird §. 18. In der geometrischen Verhältnis aber wird bestimt, wie oft das vordere Glied das hintere in sich enthalte, §. 169. so durch die Division gefunden wird, §. 20. Der Quotient, so solches anzeiget, heist der **Nahme** der Verhältnis (exponens rationis).

Die arithmetische Verhältnis wird gemeiniglich so ausgedruckt, daß zwischen den Gliedern das Zeichen (,) gesetzet wird, und wenn es nöhtig oberhalb noch ihre Differenz.

Z. B. a^d,b oder $6^2,8$.

Die

Die geometrische Verhältnis aber, deren Wesen in der Division bestehet, wird auch durch das zwischen den Gliedern gesezte Divisionszeichen ausgedrückt, worüber man noch, wann es erfordert wird, den Exponenten zu setzen pflegt.

Z. B. $a \overset{\circ}{:} b$, $28 \overset{7}{:} 4$, oder $\frac{a}{b} : \frac{10}{5}$.

In beiden Gattungen von Verhältnissen wird das Zeichen derselben durch das Wort zu ausgesprochen, als: a zu b, oder 28 zu 4.

Zusatz.

§. 199. Jede Division ist daher eine geometrische Verhältnis, worin der Dividendus das vordere, der Divisor das hintere Glied, und der Quotient der Nahme der Verhältnis ist §. 20. 198. und umgekehrt eine iede geometrische Verhältnis ist eine Division, worin das vordere Glied der Dividendus, und das hintere der Divisor wird. Da man nun auch einen ieden Bruch als eine Division ansehen kan, §. 82. so mus auch ieder Bruch eine geometrische Verhältnis ausmachen, worin der Zähler zum vordern, der Nenner aber zum hintern Gliede wird.

Betrachtet man die Brüche als geometrische Verhältnisse, so ist klar, daß der Exponent eines eigentlichen Bruches allezeit kleiner als die Einheit, folglich selbsten ein Bruch sein müsse.

Z. B.

Z. B. Der Exponent von 6 : 12 ist $\frac{1}{2}$, und überhaupt bei einer ieden wachsenden geometrischen Verhältnis ist der Exponent ein Bruch §. 197. Im Gegenteile bei einer abnehmenden Verhältnis oder bei einem uneigentlichen Bruche ist der Exponent allezeit grösser als die Einheit.

Z. B. Von 16 : 8 ist der Exponent = 2.

Erklärung.

§. 200. Zwo Verhältnisse von einer Art sind einander gleich.

1. Arithmetisch, wenn die Unterschiede derselben gleich sind.

2. Geometrisch, wenn in beiden einerlei Exponenten vorhanden sind.

Die Gleichheit zwoer Verhältnisse heist eine **Proportion** (Ebenmaas) und die Grössen, welche die Proportion ausmachen, heissen die **Glieder** davon, so daher einander **proportional** sind, oder in Proportion stehen. Sind die gleiche Verhältnisse arithmetisch, so entstehet daraus eine **arithmetische**, sind sie aber geometrisch, eine **geometrische Proportion**.

Um zwo Verhältnisse mit einander vergleichen zu können, müssen sie von einer Art sein, nehmlich: 1. entweder alle beide arithmetisch oder alle beide geometrisch, 2 entweder alle beide abnehmend, oder alle beide wachsend, und wann dieses ist, so kan

kan eigentlich erst untersuchet werden, ob sie gleich oder ungleich sind.

Man setze z. B. die zwo arithmetische Verhältnisse 6,8 und 12,10; so ist zwar in beiden einerlei Unterschied = 2, indessen sind sie doch nicht einander gleich, weil die erstere wachsend, die andere aber abnehmend ist.

Hingegen $5\overset{3}{,}8$ und $7\overset{3}{,}10$ sind gleiche arithmetische, so wie $12 \overset{3}{:} 4$ und $15 \overset{3}{:} 5$ gleiche geometrische Verhältnisse.

Wilkührlicher Satz.

§. 201. Weil eine Proportion aus der Gleichheit zwoer Verhältnisse bestehet, so wird solche auch am bequemsten durch das Zeichen der Gleichheit, so man zwischen die beide Verhältnisse setzet, bezeichnet und ausgedrückt. Eine arithmetische Proportion wird demnach durch a, b = c, d eine geometrische aber durch a : b = c : d vorgestellet.

Diese Proportion wird folgendergestalt mit Worten ausgedrückt, a verhält sich zu b, wie c zu d.

Die Proportion $6\overset{2}{,}8 = 10\overset{2}{,}12$ ist demnach arithmetisch, folgende aber $8 \overset{4}{:} 2 = 20 \overset{4}{:} 5$ ist geometrisch.

Es sind zwar noch einige andere Bezeichnungen im Gebrauche, z. B. wo in der geometrischen Proportion anstaat dem Zeichen der Gleichheit die vier Punkte :: gesetzet werden, allein, da sie kei-

ne

ne solche Bequemlichkeit mit sich führen, wie die erstere, so sind sie nicht algemein, und fangen an, almählig zu veralten und aus der Uebung zu kommen.

Erklärung.

§. 202. Wenn in einer Proportion das hintere Glied der ersten Verhältnis zugleich das vordere der zwoten ist, so entstehet eine **stetige**, oder **aneinander hängende Proportion** (proportio continua), worin demnach nur drei Glieder sind. Ist solches aber nicht, so ist es eine **abgesonderte Proportion** (proportio discreta) worin sich demnach vier verschiedene Glieder befinden. In der lezten heisset das erste und vierte Glied, und in der ersten das erste und dritte, die äusserste Glieder, so wie in dieser das zweite und dritte, die mitlere Glieder, und in iener das zweite das mitlere Glied genennet wird. Beide Gattungen von Proportionen sind wiederum sowohl arithmetisch als geometrisch.

Um die stetigen Proportionen auszudrücken, bedienet man sich öfters folgender Zeichen:

1. Zu den arithmetischen des Zeichens $\div$ oder auch $\div$ so den Gliedern vorgesezet wird.

Z. B. $\div$ a, b, c oder $\div$ 5, 7, 9.

2. Zu den geometrischen des Zeichens ∺; in beiden aber wird das mittlere Glied nur einmal gesezt.

Z. B. ∺ a : b : c.

Oder auch man behält blos das Divisionszeichen, mit Auslassung des Zeichens der Gleichheit, als a : b : c oder in Zahlen: ∺ 4 : 8 : 16 oder 4 : 8 : 16.

Erklärung.

§. 203. Viele stetige und mit einander verknüpfte Proportionen, d. i. wo die zwote Verhältnis der vorhergehenden Proportion zugleich die erste der folgenden ist, machen eine Reihe (Progressio) welche wiederum entweder arithmetisch oder geometrisch ist, nach Verschiedenheit der Proportionen, aus welchen sie zusammen gesetzet wird. Sind die Verhältnisse, aus welchen die Progression bestehet, wachsend, in welchen folglich die nachfolgende Glieder allezeit grösser sind, als die vorhergehende §. 197. so ist es eine aufsteigende Reihe (Progressio ascendens) ist aber das Gegenteil, wo nehmlich die folgende Glieder allezeit kleiner werden, als die vorhergehende, so ist es eine absteigende Reihe (Progressio descendens).

Die Bezeichnung der Progressionen geschiehet gemeiniglich auf eben die Art, wie der stetigen Proportionen, aus welchen sie entstehen; nehmlich
arithmetisch ÷ a, b, c, d, f....
geometrisch ∺ a : b : c : d : f.....

Z. B. In Zahlen.

Eine arithmetische aufsteigende Progression
÷ 3, 5, 7, 9, 11...wo die Glieder um den Unterschied 2 wachsen.

Eine arithmetische abnehmende Progression
÷ 15, 12, 9, 6, 3, 0. wo die Glieder um den Unterschied 3 abnehmen.

Eine geometrische aufsteigende Progression
∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32....wo die Glieder um den Exponenten $\frac{1}{2}$ zunehmen.

Eine geometrische absteigende Progression
∷ 243 : 81 : 27 : 9 : 3 : 1.....wo die Glieder um den Exponenten 3 abnehmen.

Lehrsatz.

204. Wenn zwo Verhältnisse einer dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich.

Beweis. Da überhaupt zwo Grössen unter sich gleich sind, wenn sie einer dritten gleich sind, §. 5. Num. 3. so gilt solches auch von den Verhältnissen. Wenn dahero erstens geometrisch a : b = c : d und e : f = c : d, so ist auch a : b = e : f, und zweitens arith-

metisch $a, b = c, d$ und $e, f = c, d$, so ist auch $a, b = e, f$, welches auch daraus fliest, weil im ersten Fal die Exponenten, und im andern die Differenzen gleich verbleiben.

3. B. In Zahlen

geometrisch wenn $12^{3} : 4 = 15^{3} : 5$,
und $21^{3} : 7 = 15^{3} : 5$
so ist auch $12^{3} : 4 = 21^{3} : 7$.

arithmetisch wenn $10^{3},7 = 8^{3},5$
und $12^{3},9 = 8^{3},5$,
so ist auch $10^{3},7 = 12^{3},9$.

Lehrsatz.

§. 205. Wenn zwo Grössen mit einer dritten in einerlei Verhältnis stehen, so sind sie einander gleich; d. i. 1. wenn $a : b = c : b$, so ist $a = c$, und 2. wenn $a,b = c,b$ so ist wiederum $a = c$.

Beweis. 1. Denn da geometrische Verhältnisse Divisionen sind, §. 199. so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$. Multipliciret man nun beide Grössen mit b so bekomt man $a = c$.

2. Da bei gleichen arithmetischen Verhältnissen einerlei Unterschiede sind §. 200. so ist $a \pm b = c \pm b$. Addiret oder subtrahiret man nun beiderseits b, so bekomt man $a = c$.

Zu-

Zusatz.

§. 206. Desgleichen umgekehrt: gleiche Grössen haben zu einer dritten einerlei Verhältnis. Denn

1. Geometrisch: wenn a = c und man dividiret beiderseits durch b, so bekomt man $\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ §. 56. Num. 5. d. i. a : b = c : b §. 199.

2. Arithmetisch: wenn a = c und man addiret oder subtrahiret beiderseits b, so bekomt man wiederum a ± b = c ± b §. 56. Num. 1. 2. d. i. a,b = c,b §. 200.

Ferner wenn in einer Proportion das erste Glied gleich dem andern oder dritten, so ist auch das dritte oder das andere gleich dem vierten. Denn

1. Geometrisch: a : b = c : d, so ist $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ §. 199. Hebt man nun diese Divisionen auf, so bekomt man ad = bc, ist nun a = b, und man dividiret beiderseits damit, so ist d = c, oder ist a = c so ist d = b.

2. Arithmetisch, wenn a,b = c,d und a = b so ist zwischen den Gliedern keine Differenz, folglich sind sie einander gleich; ist aber a = c, und man setzet a ± b = c ± d, subtrahiret hierauf beiderseits a und c, so bleibt b = d.

Zweites Hauptstück.

Von der geometrischen Proportion.

Lehrsatz.

§. 207.

In einer geometrischen Verhältnis bestehet das vordere Glied aus dem Produkte des hintern Gliedes in den Exponenten.

Beweis. Denn weil eine iede geometrische Verhältnis eine Division ist, worin das vordere Glied der Dividendus, das hintere der Divisor, und der Exponent der Quotient ist §. 199. Der Dividendus aber allezeit ein Produkt aus dem Divisor und Quotienten ist §. 44. so ist auch das vordere Glied der geometrischen Verhältnis ein Produkt aus dem hintern Gliede und Exponenten.

In der Verhältnis $a \overset{n}{:} b$ ist daher $a = bn$, und in $8 \overset{2}{:} 4$ ist $8 = 4 \times 2$.

Zusatz.

§. 208. 1. Weil $a = bn$, so ist auch $\frac{a}{n} = b$. Daher entstehet das zweite Glied,

wenn

wenn das erstere durch den Exponenten dividiret wird.

2. Weil gleiche Grössen für einander gesetzet werden können, §. 5. Num. 2. so kan man in ieder geometrischen Verhältnis an die Stelle sowohl des vordern als auch des hintern Gliedes ihre Wehrte setzen. Wenn daher $a \overset{n}{:} b$, so kan man an deren staat setzen $bn : b$ oder auch $a : \frac{a}{n}$.

Lehrsatz.

§. 209. In einer geometrischen Proportion ist das Produkt der beiden äussersten Glieder gleich dem Produkte der beiden mitlern, d. i. wenn $a : b = c : d$, so ist $ad = bc$.

Beweis. Man nenne den Exponenten der Verhältnisse = n, so ist $a = bn$ und $c = dn$ §. 207. daher bekomt man die Proportion $bn : b, = dn : d$, worin das Produkt sowohl der äussern als mitlern Glieder $= bdn$ ist.

Z. B. $12 : 4 = 15 : 5$.
worin $12 \times 5 = 4 \times 15 = 60$.

Zusatz.

§. 210. Ist es eine aneinander hängende Proportion, so ist das Produkt der äussern Glieder gleich dem Quadrate des mitlern.

Denn wenn $a : b : c$ oder $a : b = b : c$, so ist $ac = b^2$.

Z. B. $6 : 12 : 24$
worin $6 \times 24 = \overline{12}^2 = 144$.

Zusatz.

§. 211. Hieraus folget demnach:

1. Zu drei gegebenen Grössen, a, b und c kan die vierte Proportionalgrösse x gefunden werden.

Man setze $a : b = c : x$,

so ist $ax = bc$ §. 209. folglich ist $x = \frac{bc}{a}$.

2. Zu zwo gegebenen Grössen a und b kan die dritte Proportionalgrösse x gefunden werden.

Denn man setze $a : b : x$,

so ist $ax = b^2$ §. 210. folglich $x = \frac{b^2}{a}$.

3. Zu zwo gegebenen Grössen a und b kan die mitlere Proportional gefunden werden. Denn wenn $a : x : b$ so ist $ab = x^2$ folglich $\sqrt{ab} = x$.

4. Ueberhaupt, wenn in einer abgesonderten Proportion drei Glieder, und in einer stetigen zwo derselben gegeben sind, so kan in der ersten allezeit das vierte und in der andern das dritte gefunden werden.

Denn

Denn wenn $a : b = x : c$, so ist $ac = bx$, folglich $\frac{ac}{b} = x$, und so in den übrigen Fällen.

Die erste von diesen Regeln ist die sogenante Regel de Tri, welche in dem vierten Hauptstück ausführlicher wird abgehandelt werden.

Der Ausdruck $\frac{bc}{a}$ kan allezeit als die vierte Proportional zu a, b und c angesehen und an deren Stelle gesetzet werden,

so daß $a : b = c : \frac{bc}{a}$ und $\frac{ab + b^2}{c - d}$

giebt $c - d : a + b = b : \frac{ab + b^2}{c - d}$.

Ferner $\frac{b^2}{a}$ giebt $a : b : \frac{b^2}{a}$

und $\sqrt{ab}$ giebt $a : \sqrt{ab} : b$.

Lehrsatz.

§. 212. Wenn zwei Produkte gleich sind, und man löset iedes in zwei Faktoren auf, nimt hernach die Faktoren des einen zu den äussersten, die Faktoren des andern zu den mitlern Gliedern an, so stehen sie in einer geometrischen Proportion.

Beweis. Es sei $ab = cd$,

so ist $a = \frac{cd}{b}$ und $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$,

folglich ist auch $a : c = d : b$ §. 199.

Dieser Satz ist der umgekehrte des §. 209.
Es können demnach zwei gleiche Produkte allezeit in eine oder mehrere Proportionen aufgelöset werden, welche alle richtig sind, wenn nur die Faktoren derselben als Glieder der Proportion so geordnet werden, daß die Produkte der aussern und die Produkte der mitlern die gegebene Produkte wieder hervorbringen.

Es sei z. B. $abc = def$,
so ist $ab : de = f : c$
oder auch $ac : df = e : b$ u. s. w.
Ferner $1 - x^2 = a$ giebt zur Proportion
$1 - x : a = 1 : 1 + x$.

Desgleichen die Produkte $\frac{ab + b^2}{x} = \frac{c^2d}{f^2}$

geben $\frac{a + b}{x} : \frac{c^2}{f^2} = d : b$

Ferner $\frac{a + b}{x} : \frac{c^2}{f} = \frac{d}{f} : b$

desgleichen $a + b : c = \frac{cd}{f^2} : \frac{b}{x}$

und $a + b : \frac{c}{f} = \frac{cd}{f} : \frac{b}{x}$ u. s. w.

Es giebt demnach zwei unfehlbare Kenzeichen, woraus die Richtigkeit der geometrischen Proportionen beurteilet werden kan, nehmlich 1. die Gleichheit der Exponenten, und 2. die Gleichheit der Produkte der äussersten und mitlern Glieder.

Zusatz.

§. 213. Da nun vier Faktoren zweier Produkten achtmal versetzet werden können, ohne die

die Produkte selbsten zu ändern, und ihre Gleichheit zu hindern, so können auch die Glieder einer geometrischen Proportion eben so oft versetzet werden, so daß solche noch allemal in Proportion verbleiben; wie folgende Tafel zeiget:

Stellung der Faktoren.		In Proportion gesezte Faktors.	
1.	ad = bc......	a : b = c : d	8 : 4 = 6 : 3
2.	ad = cb......	a : c = b : d	8 : 6 = 4 : 3
3.	bc = ad......	b : a = d : c	4 : 8 = 3 : 6
4.	bc = da......	b : d = a : c	4 : 3 = 8 : 6
5.	cb = ad......	c : a = d : b	6 : 8 = 3 : 4
6.	cb = da......	c : d = a : b	6 : 3 = 8 : 4
7.	da = bc......	d : b = c : a	3 : 4 = 6 : 8
8.	da = cb......	d : c = b : a	3 : 6 = 4 : 8

Diese Folgerungen können als eben so viele Lehrsätze von den Proportionen angesehen werden, so gelauffig sein müssen, und die man auch besonders mit Worten ausdrücken kan.

Z. B. Der zweite Satz heist: in einer geometrischen Proportion verhält sich auch verwechselt (alternando) das erste Glied zum dritten, wie das zweite zum vierten und der dritte: umgekehrt (invertendo reciproce) das zweite Glied verhält sich zum ersten, wie das vierte zum dritten.

Zusaz.

§. 214. Aus eben dieser Gleichheit der Produkten $ad = bc$ folget noch ferner:

1. Daß zusammengesezt (componendo) die Summe der beiden ersten Glieder sich zum ersten oder zweiten verhalte, wie die Summe der beiden leztern zum dritten oder vierten Gliede.

Denn wenn $a : b = c : d$ und man sezet: $a + b : a = c + d : c$ oder auch $a + b : b = c + d : d$, so ist im ersten Fal das Produkt der aussern und mitlern Glieder $ac + bc = ac + ad$, und in dem zweiten $ad + bd = bc + bd$. Streichet man in der ersten Gleichung beiderseits ac aus, und in der andern bd, so bleiben die vorigen Produkte $ad = bc$.

2. Daß geteilt (dividendo) der Unterschied zwischen den beiden ersten Glieder sich zum ersten oder zweiten Gliede verhalte, wie der Unterschied zwischen dem dritten und vierten Gliede zum dritten oder vierten.

Denn wenn $a : b = c : d$, und man sezet

$$a - b : a = c - d : c$$

oder $a - b : b = c - d : d$, so ist im ersten Fal das Produkt der äussern und mitlern Glieder

$$ac - bc = ac - ad \text{ und im zweiten}$$
$$ad - bd = bc - bd.$$

Strei-

Streichet man nun in der ersten Gleichung beiderseits ac aus, und in der andern bd, so hat man wiederum die gegebene gleiche Produkte ad = be.

Wenn mehrere gleiche Verhältnisse vorhanden sind, wie a : b = c : d = e : f so kan man auch sagen: daß die Summe aller vordern Glieder sich zur Summe aller hintern verhalte, wie ein jedes vördere Glied zu seinem hintern Gliede; oder daß:
a + c + e : b + d + f = a : b oder c : d.
Denn da die Produkte der äussern Glieder = ab + bc + be, der mitlern aber = ab + ad + af; so ist nur zu erweisen, daß diese Produkte einander gleich sind.
Da nun a : b = c : d und a : b = e : f, so ist ad = bc und af = be.
Setzet man nun in dem ersten Produkte anstaat bc ihr gleiches ad, und anstaat be das gleiche af §. 5. Num. 2. so bekommen wir zum Produkte der aussern Glieder ab + ad + af, welches dem Produkte der mitlern gleich ist.

Lehrsatz.

§. 215. Wenn zwo Grössen, oder Glieder einer Verhältnis a und b durch eine dritte Grösse c multipliciret oder dividiret werden, so verhalten sich die Produkte oder Quotienten gegen einander, wie die Grössen selbsten, d. i. ac : bc = a : b und $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$ = a : b.

Be-

Beweis. Denn im ersten Fal bekomt man zum Produkte der beiden äussersten und mittlern Glieder abc = abc. und im zweiten $\frac{ab}{c} = \frac{ab}{c}$ §. 212.

Lehrsatz.

§. 216. 1. Wenn die Glieder einer Proportion a : b = c : d durch die Glieder einer andern f : g = h : l multipliciret werden, so stehen auch die Produkte in einer Proportion, d. i. af : bg = ch : dl.

2. Wenn die Glieder der ersten Proportion durch die Glieder der andern dividiret werden, so stehen auch die Quotienten in einer Proportion,

d. i. $\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{l}$.

Beweis. 1. Denn nach der ersten Proportion ist ad = bc
und nach der andern fl = gh §. 209.
folglich ist adfl = bcgh §. 56. Num. 3.
Dahero ist nach §. 212.

af : bg = ch : dl.

2. Weil ad = bc und fl = gh,

so ist auch $\frac{ad}{fl} = \frac{bc}{gh}$ §. 56. Num. 4.

Folglich ist $\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{d}{l}$ §. 212.

Zu-

Zusatz.

§. 217. 1. Wenn demnach die Wurzeln in einer Proportion stehen, so müssen auch ihre Quadrate, Cubi, und überhaupt alle Potenzen derselben von gleichem Grade in einer Proportion stehen, weil diese Potenzen der Glieder auf keine andere Art entstehen, als daß sie durch die Glieder der ersten Proportion wieder multipliciret worden §. 118. u. 216.

Daher wenn $a : b = c : d$,
so ist auch $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$,
ferner $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$ und überhaupt,
$$a^m : b^m = c^m : d^m.$$

2. Desgleichen umgekehrt, wenn aus den Gliedern einer Proportion die Wurzeln von gleichem Grade ausgezogen werden, so stehen auch diese in einer Proportion,
d. i. wenn $a : b = c : d$,
so ist $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$,
ferner $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} : \sqrt[3]{d}$, und überhaupt
$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}.$$
Denn weil $ad = bc$ §. 209.
so ist $\sqrt[m]{ad} = \sqrt[m]{bc}$ §. 163.
oder $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c}$ §. 209.
folglich ist $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$ §. 212.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 218. In einer aneinander hängenden Proportion verhält sich das erste Glied zum dritten, wie das Quadrat des ersten zum Quadrate des zweiten, d. i. wenn $a : b : c$ so ist $a : c = a^2 : b^2$.

Beweis. Es ist blos zu erweisen, daß das Produkt der beiden äussern Glieder dem Produkte der beiden mitlern gleich sei, oder daß: $ab^2 = ca^2$. Diesem nach setze man: $ab^2 = ab^2$ §. 5. Num. 1. Da nun nach der gegebenen Proportion $ac = b^2$ §. 210. so kan in dem andern Gliede dieser Gleichung ac anstaat b^2 gesetzet werden §. 5. Num. 2.
so bekomt man $ab^2 = a^2c$,
folglich ist $a : c = a^2 : b^2$ §. 212.

Die übrige Säße, so die stetige Proportionen betreffen, gehören in die Lehre von den Progressionen.

Erklärung.

§. 219. Eine iede Verhältnis wird **gerade** (ratio directa) genennet, wenn das vordere und hintere Glied ungeändert an ihrer Stelle gelassen werden. Werden aber die Glieder umgekehret, so entstehet eine **umgekehrte Verhältnis** (ratio inversa, reciproca).

Wenn

Wenn man demnach die beide Verhältnisse a : b und c : d hätte, und sie machten eine Proportion aus, so daß a : b = c : d, so sagt man: a : b stehet in der geraden Verhältnis von c : d. Wenn aber die Proportion nicht eher entstehet, als wenn die Glieder der einen Verhältnis umgekehret werden, d. i. wenn a : b = d : c so sagt man: a : b stehet in der umgekehrten Verhältnis von c : d.

Z. B. Man setze die beide Brüche $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{8}$ und die Verhältnis ihrer Nenner 4 : 8 so ist $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{8}$ = 8 : 4, d. i. die beide Brüche verhalten sich gegen einander wie umgekehrt ihre Nenner.

Drittes Hauptstück.

Von zusammen gesezten Verhältnissen.

Erklärung.

§. 220.

Wenn die Glieder etlicher Verhältnisse a : b und c : d durch einander multipliciret werden, so machen die Produkte ac : bd eine **zusammen gesezte Verhältnis** (ratio composita). Sind die Verhältnisse, deren Glieder durch einander multipliciret werden, einander gleich, so entstehet aus den Produkten eine

eine **multiplicirte Verhältnis** (ratio multiplicata), welche nach der Anzahl der Faktoren, woraus sie zusammen gesetzet ist, unterschieden wird. Werden demnach zwo gleiche Verhältnisse, a : b = c : d durch einander multipliciret, so ist ac : bd eine **duplicirte Verhältnis** (ratio duplicata); werden drei gleiche Verhältnisse durch einander multipliciret, a : b = c : d = f : g, so ist acf : bdg eine **triplicirte Verhältnis** (ratio triplicata).

Wenn 8 : 4 = 2 : 1,
so ist 8 × 2 : 4 × 1 = 16 : 4 eine duplicirte Verhältnis,
und wenn 4 : 2 = 2 : 1 = 6 : 3,
so ist 4 × 2 × 6 : 2 × 1 × 3 = 48 : 6, eine triplicirte Verhältnis, in so weit sie angesehen werden, daß sie aus diesen Faktoren entstanden sind.

Jedoch mus eine duplicirte Verhältnis von einer doppelten (duplirten, ratio dupla), eine triplicirte von einer dreifachen (triplirten, ratio tripla) u. s. w. wohl unterschieden werden. Die leztern bekommen diesen Nahmen, wenn das vordere Glied doppelt, dreifach u. s. w. so gros ist, als das hintere.

So ist z. B. die vorher angeführte duplicirte Verhältnis 16 : 4 zugleich vierfach, und die triplicirte Verhältnis 48 : 6 ist zugleich achtfach.

Erklärung.

§. 221. Wenn gegenteils die Glieder einer multiplicirten Verhältnis durch ihre Fakto-

tores dividiret werden, so entstehet aus den Quotienten eine **submultiplicirte Verhältnis** (ratio submultiplicata). Wird demnach eine duplicirte Verhältnis in ihre Faktores, woraus sie entstanden, zerleget, so entstehet aus denselben eine **subduplicirte** (ratio subduplicata); aus den Faktoren einer triplicirten Verhältnis eine **subtriplicirte Verhältnis** (ratio subtriplicata) u. s. w.

Lehrsaz.

§. 222. In einer zusammengesezten Verhältnis bestehet der Exponent aus dem Produkte der Exponenten der einfachen Verhältnisse.

Beweis. Man setze die einfache Verhältnisse $a \overset{m}{:} b$ und $c \overset{n}{:} d$, aus welchen $ac \overset{\bullet}{:} bd$ zusammengesetzet worden, so sol der Exponent der leztern sein $= mn$. Derowegen setze man $a = bm$, und $c = dn$ §. 207. so haben wir die zwo Verhältnisse $bm : b$ und $dn : d$, aus welchen die zusammengesezte Verhältnis sein wird $= bdmn : bd$ deren Exponent demnach $= mn$ ist §. 198.

Zusaz.

§. 223. Wenn die vorige Verhältnisse $a : b = c : d$ einander gleich, so haben sie einerlei Exponenten §. 200. den wir $= m$ setzen

wollen; folglich ist $a = bm$, und $c = dm$, und die duplicirte Verhältnis
$ac : bd = bdm^2 : bd$, worin demnach der Exponent $= m^2$. Ist es eine triplicirte Verhältnis aus $a : b = c : d = f : g$, worin wiederum der Exponent $= m$,
so ist $a = bm$, $c = dm$ und $f = gm$,
folglich $acf : bdg = bdgm^3 : bdg$, worin der Exponent $= m^3$ u. s. f. Folglich bestehet der Exponent einer duplicirten Verhältnis aus dem Quadrate, einer triplicirten aus dem Cubus des Exponenten der einfachen Verhältnisse u. s. w.

Auf eine gleichförmige Art bestehet der Exponent einer subduplicirten Verhältnis aus der Quadratwurzel, einer subtriplicirten aus der Cubikwurzel des Exponenten der multiplicirten Verhältnis u. s. w.

Lehrsatz.

§. 224. In einer duplicirten Verhältnis verhalten sich die Glieder gegen einander, wie die Quadrate, und in einer triplicirten wie die Cubi der Glieder der einfachen Verhältnisse, aus welchen sie zusammen gesetzet worden.

Beweis. Man setze die zwo gleiche Verhältnisse $a : b = c : d$, so ist die duplicirte Verhältnis $ac : bd$ §. 220.

Weil

Weil nun $a : b = a : b$ §. 5. Num. 1.
und $c : d = a : b$

so ist $ac : bd = a^2 : b^2$ §. 216. $=$
$c^2 : d^2$ §. 217. Num. 1.

Ferner, man nehme drei gleiche Verhältnisse $a : b = c : d = f : g$,
so ist die triplicirte Verhältnis $acf : bdg$.

Weil nun $a : b = a : b$ §. 5. Num. 1.
$c : d = a : b$
$f : g = a : b$

so ist $acf : bdg = a^3 : b^3$ §. 216. $=$
$c^3 : d^3 = f^3 : g^3$ §. 217. Num. 1.

Z. B. Es sei $2 : 6 = 4 : 12$ so ist die duplicirte Verhältnis $8 : 72$.

Demnach ist $8 : 72 = 2^2 : 6^2 = 4^2 : 12^2 = 4 : 36 = 16 : 144$.

Ferner sei $2 : 4 = 3 : 6 = 1 : 2$ so ist die triplicirte Verhältnis
$6 : 48 = 2^3 : 4^3 = 3^3 : 6^3 = 1^3 : 2^3 = 8 : 64 = 27 : 216 = 1 : 8$.

Zusaz.

§. 225. Auf eine gleichförmige Art gilt das Gegenteil von der subduplicirten und subtriplicirten Verhältnis, deren Glieder sich gegen einander verhalten, wie die Quadrat- und Cubikwurzeln der Glieder der multiplicirten Verhältnis.

wollen; folglich ist $a = bm$, und $c = dm$, und die duplicirte Verhältnis
$ac : bd = bdm^2 : bd$, worin demnach der Exponent $= m^2$. Ist es eine triplicirte Verhältnis aus $a : b = c : d = f : g$, worin wiederum der Exponent $= m$,
so ist $a = bm$, $c = dm$ und $f = gm$,
folglich $acf : bdg = bdgm^3 : bdg$, worin der Exponent $= m^3$ u. s. f. Folglich bestehet der Exponent einer duplicirten Verhältnis aus dem Quadrate, einer triplicirten aus dem Cubus des Exponenten der einfachen Verhältnisse u. s. w.

Auf eine gleichförmige Art bestehet der Exponent einer subduplicirten Verhältnis aus der Quadratwurzel, einer subtriplicirten aus der Cubikwurzel des Exponenten der multiplicirten Verhältnis u. s. w.

Lehrsatz.

§. 224. In einer duplicirten Verhältnis verhalten sich die Glieder gegen einander, wie die Quadrate, und in einer triplicirten wie die Cubi der Glieder der einfachen Verhältnisse, aus welchen sie zusammen gesetzet worden.

Beweis. Man setze die zwo gleiche Verhältnisse $a : b = c : d$, so ist die duplicirte Verhältnis $ac : bd$ §. 220.

Weil

Weil nun $a : b = a : b$ §. 5. Num. 1.
und $c : d = a : b$

so ist $ac : bd = a^2 : b^2$ §. 216. $=$
$c^2 : d^2$ §. 217. Num. 1.

Ferner, man nehme drei gleiche Verhältnisse $a : b = c : d = f : g$,
so ist die triplicirte Verhältnis $acf : bdg$.

Weil nun $a : b = a : b$ §. 5. Num. 1.
$c : d = a : b$
$f : g = a : b$

so ist $acf : bdg = a^3 : b^3$ §. 216. $=$
$c^3 : d^3 = f^3 : g^3$ §. 217. Num. 1.

Z. B. Es sei $2 : 6 = 4 : 12$ so ist die duplicirte Verhältnis $8 : 72$.

Demnach ist $8 : 72 = 2^2 : 6^2 = 4^2 : 12^2 = 4 : 36 = 16 : 144$.

Ferner sei $2 : 4 = 3 : 6 = 1 : 2$ so ist die triplicirte Verhältnis
$6 : 48 = 2^3 : 4^3 = 3^3 : 6^3 = 1^3 : 2^3 = 8 : 64 = 27 : 216 = 1 : 8$.

Zusaz.

§. 225. Auf eine gleichförmige Art gilt das Gegenteil von der subduplicirten und subtriplicirten Verhältnis, deren Glieder sich gegen einander verhalten, wie die Quadrat- und Cubikwurzeln der Glieder der multiplicirten Verhältnis.

[illegible]

Viertes Hauptstück

Von der Regel de Tri.

Erklärung

§. 226.

Die Regel de Tri ist die Rechnung, aus zwo oder drei gegebenen Zahlen die dritte oder vierte geometrische Proportionalzahl zu finden, und gründet sich dahero auf §. 211.

Ohnerachtet das Wesentliche und der Grund dieser Rechnung bereits §. 211. angeführet worden, so ist doch der Gebrauch davon im gemeinen Leben so unentbehrlich, und die Anwendung derselben so

mans

mannigfaltig, daß sie deswegen noch einer besondern Ausführung benöthiget und würdig ist.

Zusatz.

§. 227. Wenn die zwo Verhältnisse, so in der Regel de Tri angenommen werden, gerade Verhältnisse sind, §. 219., so ist es eine **gerade Regel de Tri** (regula trium directa); ist eine derselben aber umgekehrt, so ist es eine **umgekehrte Regel de Tri** (regula trium inversa).

Die Regel de Tri setzet voraus, daß von den vier Zahlen, von welchen die Rede ist, die zwo ersten sich wie die zwo übrigen verhalten. Bleiben sie nun in dieser natürlichen Ordnung, so ist es eine gerade Regel.

Z. B. Wenn die Maassen, Gewichter und Anzahl der Dinge und Grössen sich gegeneinander verhalten, wie ihre Preise; die Arbeiten wie die Zeiten u. s. w. als wenn man sagt 3 ℔ kosten 15 fl., was kosten 8 ℔, so hat man die Proportion 3 ℔ : 8 ℔ = 15 fl. 40 fl. Wenn gegenteils ein paar Grössen sich gegen einander verhalten, wie umgekehrt ein paar andere, so ist es eine umgekehrte Regel.

Z. B. Wenn man sagt: 6 Mann verrichten eine gegebene Arbeit in 4 Tagen, wie viel Tage werden 12 Mann dazu gebrauchen? hier kan man nicht sagen, daß die Anzahl der Tage sich gegen einander verhalten, wie die Anzahl der Arbeiter,

denn ie mehr Arbeiter in diesem Falle genommen werden, desto kürzer wird die Zeit, so zu ihrer Vollendung nöthig ist. Die Proportion ist daher folgende: $12^{\text{Mann}} : 6^{\text{Mann}} = 4^{\text{Tage}} : 2^{\text{Tage}}$, wo die Tage sich umgekehrt gegen einander verhalten, wie die Zahl der Arbeiter.

Um zu entscheiden, ob eine Rechnung zur geraden oder umgekehrten Regel de Tri gehöre lässet sich keine andere algemeine Regel geben, als daß man aus den Begriffen und aus der Natur der Sachen selbst beurteile, was die Glieder der Verhältnis für eine Gestalt bekommen müssen. Wenn daher nach der geraden Regel die gesuchte Zahl grösser oder kleiner werden müste als die gegebene dritte, da doch nach der Natur der Sache selbst das Gegenteil erfolgen solte, so ist es gewis eine verkehrte Regel de Tri; wie in dem vorhergehenden Beispiele, wo nach der geraden Regel 8 Tage herauskommen würden, da doch die gesuchte Zeit nothwendig um so viel kleiner sein mus, ie mehr Arbeiter angenommen werden.

Zusatz.

§. 227. Da die Regel de Tri sowohl in einfachen als in zusammengesezten Verhältnissen verrichtet werden kan, so wird sie deswegen abermals in die einfache und zusammengesezte eingeteilet, deren iede wieder gerade oder umgekehrt sein kan.

Auf=

Aufgabe.

§. 228. Die einfache und gerade Regel de Tri zu verrichten.

Auflösung. 1. Setzet die gegebene drei Zahlen oder Glieder in ihre gehörige Proportion, und benennet das vierte Glied unterdessen mit x.

2. Multipliciret die zwei mitlere Glieder durch einander, und das Produkt dividiret durch das erste, so ist der Quotient das gesuchte vierte Glied §. 211.

Z. B. 20 Canoniers verfertigen in einer gewissen Zeit 1440 Patronen, wie viel werden 60 Canoniers in der nehmlichen Zeit verfertigen? Setzet demnach:

Can. Can. Patron.

$$20 : 60 = 1440 : x = \frac{1440 \times 60}{20} = 4320.$$

Oder: 5 Ellen Tuch kosten 20 fl. wie viel kosten 4 Ellen?

Ellen Ellen fl.

$$5 : 4 = 20 : x = \frac{20 \times 4}{5} = 16 \text{ fl.}$$

Die Rechenmeister pflegen die Proportion gemeiniglich so zu setzen: 5 Ellen kosten 20 fl. was kosten 4 Ellen? Allein da 5 Ellen und 20 fl. Dinge von verschiedener Art sind, so können sie eigentlich keine Verhältnis ausmachen, §. 196. ausgenommen, man betrachtet die Zahlen 5, 20 und 4 als Zahlen überhaupt, und nicht als be-

nante Zahlen. In welchem Falle dann allezeit einerlei zur gesuchten Zahl herauskommen mus, weil man in ieder Proportion sagen kan, daß sich das erste Glied zum dritten verhalte, wie das zweite zum vierten §. 213.

Zusatz.

§. 229. Haben die Glieder Brüche bei sich, oder bestehen ganz aus solchen, so mus bei der Multiplikation und Division der Glieder dasienige beobachtet werden, so in der Lehre von den Brüchen vorgeschrieben worden.

Zusatz.

§. 230. Bestehen die Glieder der Verhältnisse aus grössern und kleinern Einheiten, so bringet solche auf die kleineste gegebene Einheit von einer Benennung §. 41. und verrichtet hierauf die Rechnung, wie gewöhnlich. Da alsdann das gefundene vierte Glied auch in dergleichen kleinern Einheiten bestehet, so mus solches hernach wieder auf grössere Einheiten gebracht werden §. 53.

Zusatz.

§. 231. Die Probe der Regel de Tri bestehet darin, daß man die zwo äusserste, wie auch die zwo mitlern Glieder durch einander multiplicire, und wenn die Produkte gleich sind, so ist die Rechnung richtig §. 209.

Auf-

Aufgabe.

§. 232. Die einfache und verkehrte Regel de Tri zu verrichten.

Auflösung. 1. Untersuchet, ob nach der Natur der Aufgabe die Verhältnis, zu welcher die gesuchte Zahl gehört, gerade oder verkehrt sei. Wenn daher die Verhältnis zwischen dem ersten und zweiten Gliede wachsend oder abnehmend ist, und zwischen dem dritten und vierten Gliede mus das Gegenteil staat finden, so ist es eine verkehrte Regel de Tri §. 227.

2. Ordnet die Glieder nach der gehörigen Proportion in welcher sie stehen.

3. Verrichtet alsdann die Rechnung, wie nach §. 228.

Z. B. 48 Wägen müssen 12mal an einen Ort fahren, um eine gegebene Last wegzuführen, wie oft müssen 18 Wägen fahren, um eben dieses zu verrichten? Aus der Natur der Sache erhellet nun, daß 18 Wägen öfter an den Ort werden fahren müssen, als 48, und zwar desto öfter, ie geringer die Anzahl der Wägen ist. Man kan daher nicht sagen: wie 48 zu 18 so 12 zu der gesuchten Zahl, sondern vielmehr umgekehrt, und da die erste Verhältnis abnehmend ist, die zwote aber wachsen mus, so wird die Regel de Tri verkehrt, und die wahre Proportion ist:

$$18 : 48 = 12 : x = \frac{48 \times 12}{18} = 32.$$

 Die

Die gemeine Rechenmeister stellen die Glieder folgendergestalt: 48^{Bogen} $12^{\text{Thal.}}$ 18^{Bogen} und schreiben vor, daß man das erste Glied mit dem zweiten multipliciren und das Produkt durch das dritte dividiren müsse; das ist $\frac{48 \times 12}{18}$. Man siehet, daß nothwendig einerlei Zahl herauskommen müsse; allein da die Glieder gänzlich falsch gestellet sind, so sind sie auch gezwungen, eine verkehrte Regel zur Rechnung zu geben, die an sich eben so ungegründet ist.

Erklärung.

§. 233. Die zusammengesezte Regel de Tri oder die Regel von fünfen (regula de quinque) sezet zusammengesezte Verhältnisse woraus §. 227., worin eine unbekante Proportionalzahl gesuchet werden sol. Die unbekante Zahl gehöret nun entweder auch zu einem Gliede einer zusammengesezten Verhältnis, oder nicht; und hieraus entstehen zween verschiedene Fälle.

Der erste ist, wenn die unbekante Zahl kein Glied der zusammengesezten Verhältnis ist. Es sei nehmlich $af : bg = c : x$, wo aus den einfachen Verhältnissen $a : b$ und $f : g$ die zusammengesezte $af : bg$ entstanden; so ist $\frac{bgc}{af} = x$.

Der

Der zweite ist: wenn die gesuchte Zahl ein Glied der zusammengesezten Verhältnis ist. Es sei nehmlich: $a : b = cf : dx$, so ist $adx = bcf$ und folglich $x = \frac{bcf}{ad}$, aus welchen Gleichungen die Regeln der Rechnung hergeleitet werden müssen, wobei man nur noch die einzelne Grössen a, b, c, f, d, x Säze nennen kan, um sie nicht mit den Gliedern der Verhältnisse zu vermischen.

Aufgabe.

§. 234. Nach der zusammengesezten geraden Regel de Tri zu fünf Zahlen oder Säzen die sechste Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. 1. Sezet dieienige Säze zusammen, aus welchen die Glieder der zusammengesezten Verhältnis entstehen müssen, und multipliciret sie durch einander.

2. Ordnet die Produkte in die gehörige Proportion.

3. In dem ersten Falle §. 233. wenn die gesuchte Zahl nicht zu der zusammengesezten Verhältnis gehört, so schliesset: wie das Produkt des ersten und andern Sazes zum Produkte des dritten und vierten, so verhält sich der fünfte zum gesuchten sechsten.

4. Im zweiten Falle, wenn die gesuchte Zahl ein Glied der zusammengesezten Verhält-

nis

wollen; folglich ist a = bm, und c = dm, und die duplicirte Verhältnis
$ac : bd = bdm^2 : bd$, worin demnach der Exponent = m^2. Ist es eine triplicirte Verhältnis aus $a : b = c : d = f : g$, worin wiederum der Exponent = m,
so ist a = bm, c = dm und f = gm,
folglich $acf : bdg = bdgm^3 : bdg$, worin der Exponent = m^3 u. s. f. Folglich bestehet der Exponent einer duplicirten Verhältnis aus dem Quadrate, einer triplicirten aus dem Cubus des Exponenten der einfachen Verhältnisse u. s. w.

Auf eine gleichförmige Art bestehet der Exponent einer subduplicirten Verhältnis aus der Quadratwurzel, einer subtriplicirten aus der Cubikwurzel des Exponenten der multiplicirten Verhältnis u. s. w.

Lehrsatz.

§. 224. In einer duplicirten Verhältnis verhalten sich die Glieder gegen einander, wie die Quadrate, und in einer triplicirten wie die Cubi der Glieder der einfachen Verhältnisse, aus welchen sie zusammen gesetzet worden.

Beweis. Man setze die zwo gleiche Verhältnisse $a : b = c : d$, so ist die duplicirte Verhältnis $ac : bd$ §. 220.

Weil

Weil nun $a : b = a : b$ §. 5. Num. 1.
und $c : d = a : b$

so ist $ac : bd = a^2 : b^2$ §. 216. $=$
$c^2 : d^2$ §. 217. Num. 1.

Ferner, man nehme drei gleiche Verhältnisse $a : b = c : d = f : g$,
so ist die triplicirte Verhältnis $acf : bdg$.

Weil nun $a : b = a : b$ §. 5. Num. 1.
$c : d = a : b$
$f : g = a : b$

so ist $acf : bdg = a^3 : b^3$ §. 216. $=$
$c^3 : d^3 = f^3 : g^3$ §. 217. Num. 1.

Z. B. Es sei $2 : 6 = 4 : 12$ so ist die duplicirte Verhältnis $8 : 72$.

Demnach ist $8 : 72 = 2^2 : 6^2 = 4^2 : 12^2 = 4 : 36 = 16 : 144$.

Ferner sei $2 : 4 = 3 : 6 = 1 : 2$ so ist die triplicirte Verhältnis
$6 : 48 = 2^3 : 4^3 = 3^3 : 6^3 = 1^3 : 2^3 = 8 : 64 = 27 : 216 = 1 : 8$.

Zusaz.

§. 225. Auf eine gleichförmige Art gilt das Gegenteil von der subduplicirten und subtriplicirten Verhältnis, deren Glieder sich gegen einander verhalten, wie die Quadrat- und Cubikwurzeln der Glieder der multiplicirten Verhältnis.

Denn wenn $ac : bd = a^2 : b^2$,
so ist $\sqrt{ac} : \sqrt{bd} = a : b = c : d$ §. 217. Num. 2.

Ferner wenn $acf : bdg = a^3 : b^3$,
so ist $\sqrt[3]{acf} : \sqrt[3]{bdg} = a : b = c : d = f : g$.

Nach den vorigen Beispielen ist

$\sqrt{8} : \sqrt{72} = 2 : 6 = 4 : 12$.

Ferner $\sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{48} = 2 : 4 = 3 : 6 = 1 : 2$.

Viertes Hauptstück.

Von der Regel de Tri.

Erklärung.

§. 226.

Die Regel de Tri ist die Rechnung, aus zwo oder drei gegebenen Zahlen die dritte oder vierte geometrische Proportionalzahl zu finden, und gründet sich dahero auf §. 211.

Ohneracht das Wesentliche und der Grund dieser Rechnung bereits §. 211. angeführet worden, so ist doch der Gebrauch davon im gemeinen Leben so unentbehrlich, und die Anwendung derselben so man=

mannigfaltig, daß sie deswegen noch einer besondern Ausführung benöthiget und würdig ist.

Zusatz.

§. 227. Wenn die zwo Verhältnisse, so in der Regel de Tri angenommen werden, gerade Verhältnisse sind, §. 219., so ist es eine **gerade Regel de Tri** (regula trium directa); ist eine derselben aber umgekehrt, so ist es eine **umgekehrte Regel de Tri** (regula trium inversa).

Die Regel de Tri setzet voraus, daß von den vier Zahlen, von welchen die Rede ist, die zwo ersten sich wie die zwo übrigen verhalten. Bleiben sie nun in dieser natürlichen Ordnung, so ist es eine gerade Regel.

Z. B. Wenn die Maassen, Gewichter und Anzahl der Dinge und Grössen sich gegeneinander verhalten, wie ihre Preise; die Arbeiten wie die Zeiten u. s. w. als wenn man sagt 3 ℔ kosten 15 fl., was kosten 8 ℔, so hat man die Proportion 3 ℔ : 8 ℔ = 15 fl. 40 fl. Wenn gegenteils ein paar Grössen sich gegen einander verhalten, wie umgekehrt ein paar andere, so ist es eine umgekehrte Regel.

Z. B. Wenn man sagt: 6 Mann verrichten eine gegebene Arbeit in 4 Tagen, wie viel Tage werden 12 Mann dazu gebrauchen? hier kan man nicht sagen, daß die Anzahl der Tage sich gegen einander verhalten, wie die Anzahl der Arbeiter,

denn ie mehr Arbeiter in diesem Falle genommen werden, desto kürzer wird die Zeit, so zu ihrer Vollendung nöthig ist. Die Proportion ist daher folgende: $12^{\text{Mann}} : 6^{\text{Mann}} = 4^{\text{Tage}} : 2^{\text{Tage}}$, wo die Tage sich umgekehrt gegen einander verhalten, wie die Zahl der Arbeiter.

Um zu entscheiden, ob eine Rechnung zur geraden oder umgekehrten Regel de Tri gehöre lässet sich keine andere algemeine Regel geben, als daß man aus den Begriffen und aus der Natur der Sachen selbst beurteile, was die Glieder der Verhältnis für eine Gestalt bekommen müssen. Wenn daher nach der geraden Regel die gesuchte Zahl grösser oder kleiner werden müste als die gegebene dritte, da doch nach der Natur der Sache selbst das Gegenteil erfolgen solte, so ist es gewis eine verkehrte Regel de Tri; wie in dem vorhergehenden Beispiele, wo nach der geraden Regel 8 Tage herauskommen würden, da doch die gesuchte Zeit nothwendig um so viel kleiner sein mus, ie mehr Arbeiter angenommen werden.

Zusatz.

§. 227. Da die Regel de Tri sowohl in einfachen als in zusammengesezten Verhältnissen verrichtet werden kan, so wird sie deswegen abermals in die einfache und zusammengesezte eingeteilet, deren iede wieder gerade oder umgekehrt sein kan.

Auf-

Aufgabe.

§. 228. Die einfache und gerade Regel de Tri zu verrichten.

Auflösung. 1. Setzet die gegebene drei Zahlen oder Glieder in ihre gehörige Proportion, und benennet das vierte Glied unterdessen mit x.

2. Multipliciret die zwei mitlere Glieder durch einander, und das Produkt dividiret durch das erste, so ist der Quotient das gesuchte vierte Glied §. 211.

Z. B. 20 Canoniers verfertigen in einer gewissen Zeit 1440 Patronen, wie viel werden 60 Canoniers in der nehmlichen Zeit verfertigen? Setzet demnach:

Can. Can. Patron.

$$20 : 60 = 1440 : x = \frac{1440 \times 60}{20} = 4320.$$

Oder: 5 Ellen Tuch kosten 20 fl. wie viel kosten 4 Ellen?

Ellen Ellen fl.

$$5 : 4 = 20 : x = \frac{20 \times 4}{5} = 16 \text{ fl.}$$

Die Rechenmeister pflegen die Proportion gemeiniglich so zu setzen: 5 Ellen kosten 20 fl. was kosten 4 Ellen? Allein da 5 Ellen und 20 fl. Dinge von verschiedener Art sind, so können sie eigentlich keine Verhältnis ausmachen, §. 196. ausgenommen, man betrachtet die Zahlen 5, 20 und 4 als Zahlen überhaupt, und nicht als be-

nante Zahlen. In welchem Falle dann allezeit einerlei zur gesuchten Zahl herauskommen mus, weil man in ieder Proportion sagen kan, daß sich das erste Glied zum dritten verhalte, wie das zweite zum vierten §. 213.

Zusatz.

§. 229. Haben die Glieder Brüche bei sich, oder bestehen ganz aus solchen, so mus bei der Multiplikation und Division der Glieder dasienige beobachtet werden, so in der Lehre von den Brüchen vorgeschrieben worden.

Zusatz.

§. 230. Bestehen die Glieder der Verhältnisse aus grössern und kleinern Einheiten, so bringet solche auf die kleineste gegebene Einheit von einer Benennung §. 41. und verrichtet hierauf die Rechnung, wie gewöhnlich. Da alsdann das gefundene vierte Glied auch in dergleichen kleinern Einheiten bestehet, so mus solches hernach wieder auf grössere Einheiten gebracht werden §. 53.

Zusatz.

§. 231. Die Probe der Regel de Tri bestehet darin, daß man die zwo äusserste, wie auch die zwo mitlern Glieder durch einander multiplicire, und wenn die Produkte gleich sind, so ist die Rechnung richtig §. 209.

Aufgabe.

§. 232. Die einfache und verkehrte Regel de Tri zu verrichten.

Auflösung. 1. Untersuchet, ob nach der Natur der Aufgabe die Verhältnis, zu welcher die gesuchte Zahl gehört, gerade oder verkehrt sei. Wenn daher die Verhältnis zwischen dem ersten und zweiten Gliede wachsend oder abnehmend ist, und zwischen dem dritten und vierten Gliede mus das Gegenteil staat finden, so ist es eine verkehrte Regel de Tri §. 227.

2. Ordnet die Glieder nach der gehörigen Proportion in welcher sie stehen.

3. Verrichtet alsdann die Rechnung, wie nach §. 228.

Z. B. 48 Wägen müssen 12mal an einen Ort fahren, um eine gegebene Last wegzuführen, wie oft müssen 18 Wägen fahren, um eben dieses zu verrichten? Aus der Natur der Sache erhellet nun, daß 18 Wägen öfter an den Ort werden fahren müssen, als 48, und zwar desto öfter, ie geringer die Anzahl der Wägen ist. Man kan daher nicht sagen: wie 48 zu 18 so 12 zu der gesuchten Zahl, sondern vielmehr umgekehrt, und da die erste Verhältnis abnehmend ist, die zwote aber wachsen mus, so wird die Regel de Tri verkehrt, und die wahre Proportion ist:

$$18 : 48 = 12 : x = \frac{48 \times 12}{18} = 32.$$

Die gemeine Rechenmeister stellen die Glieder folgendergestalt: $48^{\text{Bögen}}\ 12^{\text{mal}}\ 18^{\text{Bögen}}$ und schreiben vor, daß man das erste Glied mit dem zweiten multipliciren und das Produkt durch das dritte dividiren müsse; das ist $\frac{48 \times 12}{18}$. Man siehet, daß nothwendig einerlei Zahl herauskommen müsse; allein da die Glieder gänzlich falsch gestellet sind, so sind sie auch gezwungen, eine verkehrte Regel zur Rechnung zu geben, die an sich eben so ungegründet ist.

Erklärung.

§. 233. Die zusammengesezte Regel de Tri oder die Regel von fünfen (regula de quinque) setzet zusammengesezte Verhältnisse voraus §. 227., worin eine unbekante Proportionalzahl gesuchet werden sol. Die unbekante Zahl gehöret nun entweder auch zu einem Gliede einer zusammengesezten Verhältnis, oder nicht; und hieraus entstehen zween verschiedene Fälle.

Der erste ist, wenn die unbekante Zahl kein Glied der zusammengesezten Verhältnis ist. Es sei nehmlich $af : bg = c : x$, wo aus den einfachen Verhältnissen $a : b$ und $f : g$ die zusammengesezte $af : bg$ entstanden; so ist $\frac{bgc}{af} = x$.

Der

Der zweite ist: wenn die gesuchte Zahl ein Glied der zusammengesezten Verhältnis ist. Es sei nehmlich: $a : b = cf : dx$, so ist $adx = bcf$ und folglich $x = \frac{bcf}{ad}$, aus welchen Gleichungen die Regeln der Rechnung hergeleitet werden müssen, wobei man nur noch die einzelne Grössen a, b, c, f, d, x Säze nennen kan, um sie nicht mit den Gliedern der Verhältnisse zu vermischen.

Aufgabe.

§. 234. Nach der zusammengesezten geraden Regel de Tri zu fünf Zahlen oder Säzen die sechste Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. 1. Sezet dieienige Säze zusammen, aus welchen die Glieder der zusammengesezten Verhältnis entstehen müssen, und multipliciret sie durch einander.

2. Ordnet die Produkte in die gehörige Proportion.

3. In dem ersten Falle §. 233. wenn die gesuchte Zahl nicht zu der zusammengesezten Verhältnis gehört, so schliesset: wie das Produkt des ersten und andern Sazes zum Produkte des dritten und vierten, so verhält sich der fünfte zum gesuchten sechsten.

4. Im zweiten Falle, wenn die gesuchte Zahl ein Glied der zusammengesezten Verhält-

nis

nis ist, so schliesset: wie der erste Saz zum andern, so verhält sich das Produkt des dritten und vierten zum Produkte des fünften und des gesuchten. Dividiret hierauf dieses Produkt durch den bekanten fünften Saz, so bekomt ihr die gesuchte unbekante Zahl §. 233.

Das vornehmste bei dieser ganzen Rechnung komt darauf an, daß man wohl zu unterscheiden wisse, welche Säze zusammen gehören, und folglich deren Produkte die Glieder der zusammengesezten Verhältnisse ausmachen müssen; wozu wieder keine andere Regeln gegeben werden können, als daß solches nach der Natur der iedesmaligen Aufgabe entschieden werden müsse.

Z. B. Der Commendant einer belagerten Festung läst 900 Mann zum Pallisadenfeuer ausrücken, welche in 2 Nächten 57600 Flinten-Patronen verschiessen; man verlangt aber zu wissen, wie viel 752 Mann in 3 Nächten bei eben diesem Feuer verschiessen werden? hier siehet mnn nun offenbar, daß die Anzahl der verschossenen Patronen teils durch die Menge der ausgerückten Mannschaft, teils auch durch die Zahl der Nächte bestimmet werde, oder: die in den beiden Fällen verschossene Patronen verhalten sich gegeneinander, wie zusammengesezt die Menge der Mannschaft und die Zahl der Nächte. Folglich kommen die Säze und Glieder in folgender Ordnung:

Mann

Mann Nächte Mann Nächte

900 2 752 3 Patronen

$$1800 : 2256 = 57600\ x$$

$$x = \frac{57600 \times 2256}{1800} = 72192.$$

Ferner: 8 Mann graben in 6 Tagen 24 kubische Klaftern aus, wie viel graben 12 Mann in 3 Tagen?

M. T. M. T.

8 6 12 3

$$48 : 36 = 24 : x = \frac{24 \times 36}{48} = 18.$$

Diese beide Beispiele gehören zu dem ersten Fal. Wann aber die unbekante Zahl zu einem Gliede der zusammengesezten Verhältnis gehört, so geschieht die Rechnung nach folgendem Beispiele: 10 Mann brauchen in 6 Tagen 120 ℔ Brod, wie viel Mann wird man mit 300 ℔ innerhalb 5 Tagen aushalten können? hier siehet man wiederum, daß der Vorrath des benöthigten Brodes teils durch die Menge der Mannschaft, teils auch durch die Zahl der Tage bestimmet werde, und also in zusammengesezter Verhältnis der leztern stehe; wo demnach die gesuchte Zahl zu einem Gliede dieser zusammengesezten Verhältnis gehört. Die Säze kommen folgendergestalt zu stehen:

				Tage	Mann
fl.	fl.	6 Tage	10 Mann	5	x

$$120 : 300 = 60 : 5x$$

$$\frac{300 \times 60}{120} = 5x = 150$$

und $x = \frac{150}{5} = 30$

Zusatz.

§. 235. Eben diese Rechnung kan aber auch noch auf eine andere Art, nehmlich: vermittelst einer wiederholten Regel de Tri geschehen.

Denn da nach §. 233. in dem ersten Fal die gesuchte Grösse $x = \frac{bcg}{af}$, so kan dieser Ausdruck in zwo Proportionen aufgelöset werden, nehmlich

1. $a : b = c : \frac{bc}{a}$ und
2. $f : g = \frac{bc}{a} : \frac{bcg}{af}$.

In dem zweiten Falle ist $x = \frac{bcf}{ad}$, welches wiederum folgende zwo Proportionen giebt:

$$1.\ a : b = c : \frac{bc}{a} \text{ und}$$

$$2.\ d : f = \frac{bc}{a} : \frac{bcf}{ad}.$$

Löset man nun diese algemeine Grössen in Zahlen auf, so ist die Rechnung geschehen.

Z. B. Zum ersten Fal nehme man das erste Beispiel des vorhergehenden §. so ist die erste Regel de Tri:

$$\overset{a}{900}^{\text{Mann}} : \overset{b}{752}^{\text{Mann}} = \overset{c}{57600}^{\text{Patr.}} : \frac{bc}{a} = \frac{57600 \times 752}{900} = 48128.$$

Die zwote ist

$$\overset{f}{2}^{\text{Nächte}} : \overset{g}{3}^{\text{Nächte}} = \overset{\frac{bc}{a}}{48128} : x = \frac{48128 \times 3}{2} = 72192.$$

Zu dem zweiten Fal nehme man ebenfals das §. 234. gegebene Beispiel, so ist die erste Regel de Tri.

$$\overset{a}{120}\text{℔} : \overset{b}{300}\text{℔} = \overset{c}{6}^{\text{Tage}} : \frac{bc}{a} = \frac{300 \times 6}{120} = 15^{\text{Tage}}.$$

Die

Die zwote ist:

$$\overset{d}{5}^{\text{Tage}} : \overset{\frac{bc}{2}}{15}^{\text{Tage}} = \overset{f}{10}^{\text{Mann}} : x =$$
$$\frac{15 \times 10}{5} = 30^{\text{Mann}}.$$

Zusaz.

§. 236. Da bei dieser zusammengesezten Regel de Tri nicht blos eine Verhältnis der Proportion allein, sondern auch alle beide zusammengesetzet sein können; ferner da eine zusammengesezte Verhältnis nicht blos aus zwoen einfachen Verhältnissen sondern auch aus mehrern zusammengesetzet sein können, so erstrecket sich auch diese Regel de Tri nicht blos auf 5 gegebene Sätze, sondern noch um mehrere, um daraus den unbekanten zu finden; wobei iedoch die Rechnung nach ähnlichen Regeln verrichtet wird, und iedesmal aus der Natur der Proportion selbsten fliest.

Erklärung.

§. 237. Die **verkehrte** zusammengesezte Regel de Tri ist von der geraden §. 234. blos darin unterschieden, daß in derselben eine Verhältnis verkehrt angenommen werden mus.

Wo demnach wie überhaupt blos aus der Natur der Proportion und den angegebenen Umständen beurteilet werden kan, ob eine Auf-

ga-

gabe zu der verkehrten oder geraden Regel gehören.

Aufgabe.

§. 238. Die verkehrte zusammengesezte Regel de Tri zu verrichten.

Auflösung. 1. Setzet dieienige Sätze zusammen, welche vermöge der Beschaffenheit der Aufgabe die Glieder der zusammengesezten Verhältnis ausmachen, und multipliciret sie durch einander; wobei ihr

2. Zugleich untersuchet, welche Glieder in verkehrter Verhältnis gestellet werden müssen, um eine wahre Proportion auszumachen.

3. Ordnet hierauf die Glieder in die Proportion, und

4. Verrichtet die Rechnung wie gewöhnlich.

Z. B. In einer Besatzung von 6000 Mann wird iedem täglich während 4 Monathen 30 Loth Proviant oder Fleisch gereichet, man fragt: wie viel Loth man iedem Manne täglich geben könne, damit 5000 Mann durch 6 Monathe damit auskommen können. Nun siehet man

1. Daß diese Austeilungen des Proviants sich sowohl durch die Anzahl der Mannschaft als auch durch die Länge der Zeit bestimmen, und also in zusammengesezter Verhältnis derselben stehen, und

2. Daß sie in dieser umgekehrten Verhältnis stehen müssen; denn ie stärker die Besazung ist, und ie längere Zeit sie mit dem Proviant auskommen sol, desto weniger kan täglich davon einem ieden ausgeteilet werden. Folglich setze man

6000 Mann	5000 Mann
4 Monathe	6 Monathe
24000	30000

$30000 : 24000 = 30^{\text{Loht}} : x =$

$\frac{24000 \times 30}{30000} = 24$ Loht.

Ferner: 46 Arbeiter verfertigen in 6 Tagen 250 Klafter, wie viel Tage werden 58 Arbeiter mit 290 Klafter zu thun haben. In diesem Beispiele müssen zu Bestimmung der Tage sowohl die Menge der Arbeiter als auch die Grösse der vorgeschriebenen Arbeit in Betrachtung gezogen werden, folglich entstehet daraus eine zusammengesezte Verhältnis der Arbeiter und der Anzahl Klafter.

Nun müssen desto mehrere Tage angenommen werden, ie mehr Klafter auszuarbeiten sind, und diese Verhältnis ist gerade, im Gegenteile, ie grösser die Zahl der Arbeiter ist, ie weniger sind die dazu erforderlichen Tage, welche Verhältnis umgekehrt ist; folglich stehen diese Tage in zusammengesezter geraden Verhältnis der Grösse der Arbeit, und in der verkehrten der Zahl der Arbeiter; folglich kommen die Säze und die Glieder der Proportion folgendergestalt zu stehen:

250 Kl.

$$\underbrace{250^{\text{Rt.}}\ \ 58^{\text{Arb.}}}_{14500}\ :\ \underbrace{290^{\text{Rt.}}\ \ 46^{\text{Arb.}}}_{13340} = 6^{\text{Tage}} : x =$$

$$\frac{13340 \times 6}{14500} = 5\tfrac{754}{14500}\ \text{Tage.}$$

Zusatz.

§. 239. So wie die gerade zusammengesezte Regel de Tri in wiederholte einfache aufgelöset werden kan, §. 235. so kan solches gleichfals mit der verkehrten geschehen; wenn nur iedesmal die gehörige Proportion in Stellung der Glieder beobachtet wird.

So wird das §. 238. angeführte erste Beispiel folgendergestalt aufgelöset

$$6^{\text{Monath}} : 4^{\text{Monath}} = 30^{\text{Loht}} : x =$$

$$\frac{30 \times 4}{6} = 20\ \text{Loht.}$$

$$5000^{\text{Mann}} : 6000^{\text{Mann}} = 20^{\text{Loth}} : x =$$

$$\frac{6000 \times 20}{5000} = 24\ \text{Loht.}$$

Erklärung.

§. 240. Die **Geselschafts-Rechnung** ist die Rechnungsart, ein gegebenes Ganze so einzuteilen, daß seine Teile den Teilen eines andern bekanten Ganzen proportional werden, oder daß sich die Teile des einen Ganzen so

gegen einander verhalten, wie die Teile des andern Ganzen, oder auch, daß sich die ähnliche Teile von beiden Ganzen gegen einander verhalten, wie die Ganzen selbsten. Da nun in der Geselschaftsrechnung die gesuchte Teile mit andern in Proportion stehen müssen, so gehöret sie zur Regel de Tri §. 226. und ist daher auch wieder einfach oder zusammengesetzet §. 227.

Sie wird deswegen Geselschaftsrechnung genant, weil sie vornehmlich gebraucht wird, den Gewinn oder Verlust einer Handlungsgeselschaft nach Verhältnis der Einlage eines ieden, oder nach der Zeit, so die Einlage bestehet, oder nach beiden zugleich, einzuteilen. Indessen erstrecket sich ihr Nutzen viel weiter, und sie mus iedesmal angewendet werden, wenn man in einem gegebenem Ganzen die Teile nach Verhältnis, so sie in einem andern Ganzen haben, finden wil; Sie dienet also auch hauptsächlich zu Verkleinerung und Vergrösserung aller Arten von Vermischungen und Zusammensetzungen, die nach einer gewissen Proportion geschehen sol, und wovon der Gebrauch sehr häuffig ist.

Aufgabe.

§. 241. Die einfache Geselschafts-Rechnung zu verrichten.

Auflösung. 1. Bestimmet dasienige Ganze mit seinen besondern Teilen, nach deren Propor-

portion ein anderes Ganze eingeteilet werden sol.

2. Schlüsset nach der Regel de Tri: wie sich das erste Ganze zu dem andern Ganzen verhält, so verhält sich auch der erste Teil des ersten zu dem ersten ähnlichen Teile des andern.

3. Wiederholet diese Regel de Tri so vielmal als Teile das gegebene Ganze bekommen sol, so ist geschehen, was verlanget worden.

Z. B. Man hat einen Feuerwerksaß, so 30 ℔ wieget und aus folgenden Bestandteilen bestehet: 12 ℔ Salpeter, 8 ℔ Schwefel, 3 ℔ Antimonium, 1 ℔ Kohlen, 6 ℔ Pulver.

Man wil aus eben diesen Bestandteilen eine andere Masse machen, so nur 25 ℔ wiegen sol. Es ist demnach die Frage: wie viel von iedem Teile dazu genommen werden sol? Sezet demnach folgende Proportion:

30 ℔ : 25 ℔ = 12 ℔ Salpeter : x = 10 ℔ Salpeter.

Wenn ihr auf diese Art mit iedem Teile fortfahret, so bekomt ihr 6 ℔ 21⅓ Loht Schwefel, 2 ℔ 16 Loht Antimonium, 26⅔ Loth Kohlen und 5 ℔ Pulver.

Oder: 3 Sappeurs haben bei einer Belagerung in der Sappe zusammen 92 Schanzkörbe gesezt, und sind dafür mit 73 fl. 36 kr. bezahlet wor-

 den.

nis ist, so schliesset: wie der erste Saz zum andern, so verhält sich das Produkt des dritten und vierten zum Produkte des fünften und des gesuchten. Dividiret hierauf dieses Produkt durch den bekanten fünften Saz, so bekomt ihr die gesuchte unbekante Zahl §. 233.

Das vornehmste bei dieser ganzen Rechnung komt darauf an, daß man wohl zu unterscheiden wisse, welche Säze zusammen gehören, und folglich deren Produkte die Glieder der zusammengesezten Verhältnisse ausmachen müssen; wozu wieder keine andere Regeln gegeben werden können, als daß solches nach der Natur der iedesmaligen Aufgabe entschieden werden müsse.

Z. B. Der Commendant einer belagerten Festung läst 900 Mann zum Pallisadenfeuer ausrücken, welche in 2 Nächten 57600 Flinten-Patronen verschiessen; man verlangt aber zu wissen, wie viel 752 Mann in 3 Nächten bei eben diesem Feuer verschiessen werden? Hier siehet mnn nun offenbar, daß die Anzahl der verschossenen Patronen teils durch die Menge der ausgerückten Mannschaft, teils auch durch die Zahl der Nächte bestimmet werde, oder: die in den beiden Fällen verschossene Patronen verhalten sich gegeneinander, wie zusammengesezt die Menge der Mannschaft und die Zahl der Nächte. Folglich kommen die Säze und Glieder in folgender Ordnung:

Mann Nächte Mann Nächte

900 2 752 3 Patronen

$$1800 : 2256 = 57600 : x$$

$$x = \frac{57600 \times 2256}{1800} = 72192.$$

Ferner: 8 Mann graben in 6 Tagen 24 kubische Klaftern aus, wie viel graben 12 Mann in 3 Tagen?

M. T. M. T.

8 6 12 3

$$48 : 36 = 24 : x = \frac{24 \times 36}{48} = 18.$$

Diese beide Beispiele gehören zu dem ersten Fal. Wann aber die unbekante Zahl zu einem Gliede der zusammengesezten Verhältnis gehört, so geschieht die Rechnung nach folgendem Beispiele: 10 Mann brauchen in 6 Tagen 120 ℔ Brod, wie viel Mann wird man mit 300 ℔ innerhalb 5 Tagen aushalten können? hier siehet man wiederum, daß der Vorrath des benöthigten Brodes teils durch die Menge der Mannschaft, teils auch durch die Zahl der Tage bestimmet werde, und also in zusammengesezter Verhältnis der leztern stehe; wo demnach die gesuchte Zahl zu einem Gliede dieser zusammengesezten Verhältnis gehört. Die Säze kommen folgendergestalt zu stehen:

				Tage	Mann
℔	℔	6 Tage	10 Mann	5	x

$$120 : 300 = \underbrace{6 \cdot 10}_{60} : \underbrace{5 \cdot x}_{5x}$$

$$\frac{300 \times 60}{120} = 5x = 150$$

und $x = \frac{150}{5} = 30.$

Zusatz.

§. 235. Eben diese Rechnung kan aber auch noch auf eine andere Art, nehmlich: vermittelst einer wiederholten Regel de Tri geschehen.

Denn da nach §. 233. in dem ersten Fal die gesuchte Grösse $x = \frac{bcg}{af}$, so kan dieser Ausdruck in zwo Proportionen aufgelöset werden, nehmlich

1. $a : b = c : \frac{bc}{a}$ und

2. $f : g = \frac{bc}{a} : \frac{bcg}{af}$.

In dem zweiten Falle ist $x = \frac{bcf}{ad}$, welches wiederum folgende zwo Proportionen giebt:

$$1.\ a : b = c : \frac{bc}{a} \text{ und}$$

$$2.\ d : f = \frac{bc}{a} : \frac{bcf}{ad}.$$

Löset man nun diese algemeine Grössen in Zahlen auf, so ist die Rechnung geschehen.

Z. B. Zum ersten Fal nehme man das erste Beispiel des vorhergehenden §. so ist die erste Regel de Tri:

$$\overset{a}{900}^{\text{Mann}} : \overset{b}{752}^{\text{Mann}} = \overset{c}{57600}^{\text{Patr.}} : \frac{bc}{a} = \frac{57600 \times 752}{900} = 48128.$$

Die zwote ist

$$\overset{f}{2}^{\text{Nächte}} : \overset{g}{3}^{\text{Nächte}} = \overset{\frac{bc}{a}}{48128} : x = \frac{48128 \times 3}{2} = 72192.$$

Zu dem zweiten Fal nehme man ebenfals das §. 234. gegebene Beispiel, so ist die erste Regel de Tri.

$$\overset{a}{120}^{\text{℔}} : \overset{b}{300}^{\text{℔}} = \overset{c}{6}^{\text{Tage}} : \frac{bc}{a} = \frac{300 \times 6}{120} = 15^{\text{Tage}}.$$

Die

Die zwote ist:

$$\overset{d}{5}^{\text{Tage}} : \overset{\frac{bc}{2}}{15}^{\text{Tage}} = \overset{f}{10}^{\text{Mann}} : x = \frac{15 \times 10}{5} = 30^{\text{Mann}}.$$

Zusaz.

§. 236. Da bei dieser zusammengesezten Regel de Tri nicht blos eine Verhältnis der Proportion allein, sondern auch alle beide zusammengesezet sein können; ferner da eine zusammengesezte Verhältnis nicht blos aus zwoen einfachen Verhältnissen sondern auch aus mehrern zusammengesezet sein können, so erstrecket sich auch diese Regel de Tri nicht blos auf 5 gegebene Säze, sondern noch um mehrere, um daraus den unbekanten zu finden; wobei iedoch die Rechnung nach ähnlichen Regeln verrichtet wird, und iedesmal aus der Natur der Proportion selbsten fliest.

Erklärung.

§. 237. Die **verkehrte** zusammengesezte Regel de Tri ist von der geraden §. 234. blos darin unterschieden, daß in derselben eine Verhältnis verkehrt angenommen werden mus.

Wo demnach wie überhaupt blos aus der Natur der Proportion und den angegebenen Umständen beurteilet werden kan, ob eine Aufga-

gabe zu der verkehrten oder geraden Regel gehören.

Aufgabe.

§. 238. Die verkehrte zusammengesezte Regel de Tri zu verrichten.

Auflösung. 1. Sezet diejenige Säze zusammen, welche vermöge der Beschaffenheit der Aufgabe die Glieder der zusammengesezten Verhältnis ausmachen, und multipliciret sie durch einander; wobei ihr

2. Zugleich untersuchet, welche Glieder in verkehrter Verhältnis gestellet werden müssen, um eine wahre Proportion auszumachen.

3. Ordnet hierauf die Glieder in die Proportion, und

4. Verrichtet die Rechnung wie gewöhnlich.

Z. B. In einer Besazung von 6000 Mann wird jedem täglich während 4 Monathen 30 Loth Proviant oder Fleisch gereichet, man fragt: wie viel Loth man jedem Manne täglich geben könne, damit 5000 Mann durch 6 Monathe damit auskommen können. Nun siehet man

1. Daß diese Austeilungen des Proviants sich sowohl durch die Anzahl der Mannschaft als auch durch die Länge der Zeit bestimmen, und also in zusammengesezter Verhältnis derselben stehen, und

nante Zahlen. In welchem Falle dann allezeit einerlei zur gesuchten Zahl herauskommen mus, weil man in ieder Proportion sagen kan, daß sich das erste Glied zum dritten verhalte, wie das zweite zum vierten §. 213.

Zusatz.

§. 229. Haben die Glieder Brüche bei sich, oder bestehen ganz aus solchen, so mus bei der Multiplikation und Division der Glieder dasienige beobachtet werden, so in der Lehre von den Brüchen vorgeschrieben worden.

Zusatz.

§. 230. Bestehen die Glieder der Verhältnisse aus grössern und kleinern Einheiten, so bringet solche auf die kleineste gegebene Einheit von einer Benennung §. 41. und verrichtet hierauf die Rechnung, wie gewöhnlich. Da alsdann das gefundene vierte Glied auch in dergleichen kleinern Einheiten bestehet, so mus solches hernach wieder auf grössere Einheiten gebracht werden §. 53.

Zusatz.

§. 231. Die Probe der Regel de Tri bestehet darin, daß man die zwo äusserste, wie auch die zwo mitlern Glieder durch einander multiplicire, und wenn die Produkte gleich sind, so ist die Rechnung richtig §. 209.

Aufgabe.

§. 232. Die einfache und verkehrte Regel de Tri zu verrichten.

Auflösung. 1. Untersuchet, ob nach der Natur der Aufgabe die Verhältnis, zu welcher die gesuchte Zahl gehört, gerade oder verkehrt sei. Wenn daher die Verhältnis zwischen dem ersten und zweiten Gliede wachsend oder abnehmend ist, und zwischen dem dritten und vierten Gliede mus das Gegenteil staat finden, so ist es eine verkehrte Regel de Tri §. 227.

2. Ordnet die Glieder nach der gehörigen Proportion in welcher sie stehen.

3. Verrichtet alsdann die Rechnung, wie nach §. 228.

Z. B. 48 Wägen müssen 12mal an einen Ort fahren, um eine gegebene Last wegzuführen, wie oft müssen 18 Wägen fahren, um eben dieses zu verrichten? Aus der Natur der Sache erhellet nun, daß 18 Wägen öfter an den Ort werden fahren müssen, als 48, und zwar desto öfter, ie geringer die Anzahl der Wägen ist. Man kan daher nicht sagen: wie 48 zu 18 so 12 zu der gesuchten Zahl, sondern vielmehr umgekehrt, und da die erste Verhältnis abnehmend ist, die zwote aber wachsen mus, so wird die Regel de Tri verkehrt, und die wahre Proportion ist:

$$18 : 48 = 12 : x = \frac{48 \times 12}{18} = 32.$$

Die gemeine Rechenmeister stellen die Glieder folgendergestalt: 48 Wägen 12 mal 18 Wägen und schreiben vor, daß man das erste Glied mit dem zweiten multipliciren und das Produkt durch das dritte dividiren müsse; das ist $\frac{48 \times 12}{18}$. Man siehet, daß nothwendig einerlei Zahl herauskommen müsse; allein da die Glieder gänzlich falsch gestellet sind, so sind sie auch gezwungen, eine verkehrte Regel zur Rechnung zu geben, die an sich eben so ungegründet ist.

Erklärung.

§. 233. **Die zusammengesezte Regel de Tri oder die Regel von fünfen** (regula de quinque) setzet zusammengesezte Verhältnisse voraus §. 227., worin eine unbekante Proportionalzahl gesuchet werden sol. Die unbekante Zahl gehöret nun entweder auch zu einem Gliede einer zusammengesezten Verhältnis, oder nicht; und hieraus entstehen zween verschiedene Fälle.

Der erste ist, wenn die unbekante Zahl kein Glied der zusammengesezten Verhältnis ist. Es sei nehmlich $af : bg = c : x$, wo aus den einfachen Verhältnissen $a : b$ und $f : g$ die zusammengesezte $af : bg$ entstanden; so ist $\frac{bgc}{af} = x$.

Der

Der zweite ist: wenn die gesuchte Zahl ein Glied der zusammengesezten Verhältnis ist. Es sei nehmlich: $a : b = cf : dx$, so ist $adx = bcf$ und folglich $x = \frac{bcf}{ad}$, aus welchen Gleichungen die Regeln der Rechnung hergeleitet werden müssen, wobei man nur noch die einzelne Grössen a, b, c, f, d, x Säze nennen kan, um sie nicht mit den Gliedern der Verhältnisse zu vermischen.

Aufgabe.

§. 234. Nach der zusammengesezten geraden Regel de Tri zu fünf Zahlen oder Säzen die sechste Proportionalzahl zu finden.

Auflösung. 1. Sezet dieienige Säze zusammen, aus welchen die Glieder der zusammengesezten Verhältnis entstehen müssen, und multipliciret sie durch einander.

2. Ordnet die Produkte in die gehörige Proportion.

3. In dem ersten Falle §. 233. wenn die gesuchte Zahl nicht zu der zusammengesezten Verhältnis gehört, so schliesset: wie das Produkt des ersten und andern Satzes zum Produkte des dritten und vierten, so verhält sich der fünfte zum gesuchten sechsten.

4. Im zweiten Falle, wenn die gesuchte Zahl ein Glied der zusammengesezten Verhält-

nis

nis ist, so schliesset: wie der erste Saz zum andern, so verhält sich das Produkt des dritten und vierten zum Produkte des fünften und des gesuchten. Dividiret hierauf dieses Produkt durch den bekanten fünften Saz, so bekomt ihr die gesuchte unbekante Zahl §. 233.

Das vornehmste bei dieser ganzen Rechnung komt darauf an, daß man wohl zu unterscheiden wisse, welche Säze zusammen gehören, und folglich deren Produkte die Glieder der zusammengesezten Verhältnisse ausmachen müssen; wozu wieder keine andere Regeln gegeben werden können, als daß solches nach der Natur der iedesmaligen Aufgabe entschieden werden müsse.

Z. B. Der Commendant einer belagerten Festung läst 900 Mann zum Pallisadenfeuer ausrücken, welche in 2 Nächten 57600 Flinten-Patronen verschiessen; man verlangt aber zu wissen, wie viel 752 Mann in 3 Nächten bei eben diesem Feuer verschiessen werden? hier siehet mnn nun offenbar, daß die Anzahl der verschossenen Patronen teils durch die Menge der ausgerückten Mannschaft, teils auch durch die Zahl der Nächte bestimmet werde, oder: die in den beiden Fällen verschossene Patronen verhalten sich gegeneinander, wie zusammengesezt die Menge der Mannschaft und die Zahl der Nächte. Folglich kommen die Säze und Glieder in folgender Ordnung:

Mann

Mann Nächte Mann Nächte

900 2 752 3 Patronen

$$1800 : 2256 = 57600 : x$$

$$x = \frac{57600 \times 2256}{1800} = 72192.$$

Ferner: 8 Mann graben in 6 Tagen 24 kubische Klaftern aus, wie viel graben 12 Mann in 3 Tagen?

M. T. M. T.

8 6 12 3

$$48 : 36 = 24 : x = \frac{24 \times 36}{48} = 18.$$

Diese beide Beispiele gehören zu dem ersten Fal. Wann aber die unbekante Zahl zu einem Gliede der zusammengesezten Verhältnis gehört, so geschieht die Rechnung nach folgendem Beispiele: 10 Mann brauchen in 6 Tagen 120 ℔ Brod, wie viel Mann wird man mit 300 ℔ innerhalb 5 Tagen aushalten können? hier siehet man wiederum, daß der Vorrath des benöthigten Brodes teils durch die Menge der Mannschaft, teils auch durch die Zahl der Tage bestimmet werde, und also in zusammengesezter Verhältnis der leztern stehe; wo demnach die gesuchte Zahl zu einem Gliede dieser zusammengesezten Verhältnis gehört. Die Säze kommen folgendergestalt zu stehen:

					Tage	Mann
℔	℔	6 Tage	10 Mann		5	x
120 :	300 =	60		:	5x	

$$\frac{300 \times 60}{120} = 5x = 150$$

und $x = \frac{150}{5} = 30.$

Zusatz.

§. 235. Eben diese Rechnung kan aber auch noch auf eine andere Art, nehmlich: vermittelst einer wiederholten Regel de Tri geschehen.

Denn da nach §. 233. in dem ersten Fal die gesuchte Grösse $x = \frac{bcg}{af}$, so kan dieser Ausdruck in zwo Proportionen aufgelöset werden, nehmlich

1. $a : b = c : \frac{bc}{a}$ und

2. $f : g = \frac{bc}{a} : \frac{bcg}{af}$.

In dem zweiten Falle ist $x = \frac{bcf}{ad}$, welches wiederum folgende zwo Proportionen giebt:

1. $a : b = c : \frac{bc}{a}$ und

2. $d : f = \frac{bc}{a} : \frac{bcf}{ad}$.

Löset man nun diese algemeine Grössen in Zahlen auf, so ist die Rechnung geschehen.

Z. B. Zum ersten Fal nehme man das erste Beispiel des vorhergehenden §. so ist die erste Regel de Tri:

$$\overset{a}{900}^{\text{Mann}} : \overset{b}{752}^{\text{Mann}} = \overset{c}{57600}^{\text{Patr.}} : \frac{bc}{a} = \frac{57600 \times 752}{900} = 48128.$$

Die zwote ist

$$\overset{f}{2}^{\text{Nächte}} : \overset{g}{3}^{\text{Nächte}} = \overset{\frac{bc}{a}}{48128} : x = \frac{48128 \times 3}{2} = 72192.$$

Zu dem zweiten Fal nehme man ebenfals das §. 234. gegebene Beispiel, so ist die erste Regel de Tri.

$$\overset{a}{120}^{\text{tb}} : \overset{b}{300}^{\text{tb}} = \overset{c}{6}^{\text{Tage}} : \frac{bc}{a} = \frac{300 \times 6}{120} = 15^{\text{Tage}}.$$

Die

Die zwote ist:

$$\overset{d}{5}^{Tage} : \overset{\frac{bc}{a}}{15}^{Tage} = \overset{f}{10}^{Mann} : x = \frac{15 \times 10}{5} = 30^{Mann}.$$

Zusaz.

§. 236. Da bei dieser zusammengesezten Regel de Tri nicht blos eine Verhältnis der Proportion allein, sondern auch alle beide zusammengesetzet sein können; ferner da eine zusammengesezte Verhältnis nicht blos aus zwoen einfachen Verhältnissen sondern auch aus mehrern zusammengesetzet sein können, so erstrecket sich auch diese Regel de Tri nicht blos auf 5 gegebene Sätze, sondern noch um mehrere, um daraus den unbekanten zu finden; wobei iedoch die Rechnung nach ähnlichen Regeln verrichtet wird, und iedesmal aus der Natur der Proportion selbsten fliest.

Erklärung.

§. 237. Die **verkehrte** zusammengesezte Regel de Tri ist von der geraden §. 234. blos darin unterschieden, daß in derselben eine Verhältnis verkehrt angenommen werden mus.

Wo demnach wie überhaupt blos aus der Natur der Proportion und den angegebenen Umständen beurteilet werden kan, ob eine Aufga-

gabe zu der verkehrten oder geraden Regel gehören.

Aufgabe.

§. 238. Die verkehrte zusammengesezte Regel de Tri zu verrichten.

Auflösung. 1. Setzet diejenige Sätze zusammen, welche vermöge der Beschaffenheit der Aufgabe die Glieder der zusammengesezten Verhältnis ausmachen, und multipliciret sie durch einander; wobei ihr

2. Zugleich untersuchet, welche Glieder in verkehrter Verhältnis gestellet werden müssen, um eine wahre Proportion auszumachen.

3. Ordnet hierauf die Glieder in die Proportion, und

4. Verrichtet die Rechnung wie gewöhnlich.

Z. B. In einer Besatzung von 6000 Mann wird iedem täglich während 4 Monathen 30 Loth Proviant oder Fleisch gereichet, man fragt: wie viel Loth man iedem Manne täglich geben könne, damit 5000 Mann durch 6 Monathe damit auskommen können. Nun siehet man

1. Daß diese Austeilungen des Proviants sich sowohl durch die Anzahl der Mannschaft als auch durch die Länge der Zeit bestimmen, und also in zusammengesezter Verhältnis derselben stehen, und

2. Daß sie in dieser umgekehrten Verhältnis stehen müssen; denn ie stärker die Besazung ist, und ie längere Zeit sie mit dem Proviant auskommen sol, desto weniger kan täglich davon einem ieden ausgeteilet werden. Folglich seze man

6000 Mann 5000 Mann
4 Monathe 6 Monathe

24000 30000

$30000 : 24000 = 30^{\text{Loht}} : x =$

$\frac{24000 \times 30}{30000} = 24$ Loht.

Ferner: 46 Arbeiter verfertigen in 6 Tagen 250 Klafter, wie viel Tage werden 58 Arbeiter mit 290 Klafter zu thun haben. In diesem Beispiele müssen zu Bestimmung der Tage sowohl die Menge der Arbeiter als auch die Grösse der vorgeschriebenen Arbeit in Betrachtung gezogen werden, folglich entstehet daraus eine zusammengesezte Verhältnis der Arbeiter und der Anzahl Klafter.

Nun müssen desto mehrere Tage angenommen werden, ie mehr Klafter auszuarbeiten sind, und diese Verhältnis ist gerade, im Gegenteile, ie grösser die Zahl der Arbeiter ist, ie weniger sind die dazu erforderlichen Tage, welche Verhältnis umgekehrt ist; folglich stehen diese Tage in zusammengesezter geraden Verhältnis der Grösse der Arbeit, und in der verkehrten der Zahl der Arbeiter; folglich kommen die Säze und die Glieder der Proportion folgendergestalt zu stehen:

$$\underbrace{250^{\text{Rt.}}\ \ 58^{\text{Arb.}}}_{14500} : \underbrace{290^{\text{Rt.}}\ \ 46^{\text{Arb.}}}_{13340} = 6^{\text{Tage}} : x =$$

$$\frac{13340 \times 6}{14500} = 5\tfrac{7540}{14500}\ \text{Tage.}$$

Zusatz.

§. 239. So wie die gerade zusammengesezte Regel de Tri in wiederholte einfache aufgelöset werden kan, §. 235. so kan solches gleichfals mit der verkehrten geschehen; wenn nur iedesmal die gehörige Proportion in Stellung der Glieder beobachtet wird.

So wird das §. 238. angeführte erste Beispiel folgendergestalt aufgelöset

$$6^{\text{Monath}} : 4^{\text{Monath}} = 30^{\text{Lohte}} : x =$$

$$\frac{30 \times 4}{6} = 20\ \text{Loht.}$$

$$5000^{\text{Mann}} : 6000^{\text{Mann}} = 20^{\text{Loth}} : x =$$

$$\frac{6000 \times 20}{5000} = 24\ \text{Loht.}$$

Erklärung.

§. 240. Die **Geselschafts-Rechnung** ist die Rechnungsart, ein gegebenes Ganze so einzuteilen, daß seine Teile den Teilen eines andern bekanten Ganzen proportional werden, oder daß sich die Teile des einen Ganzen so ge-

gegen einander verhalten, wie die Teile des andern Ganzen, oder auch, daß sich die ähnliche Teile von beiden Ganzen gegen einander verhalten, wie die Ganzen selbsten. Da nun in der Geselschaftsrechnung die gesuchte Teile mit andern in Proportion stehen müssen, so gehöret sie zur Regel de Tri §. 226. und ist daher auch wieder einfach oder zusammengesetzet §. 227.

Sie wird deswegen Geselschaftsrechnung genant, weil sie vornehmlich gebraucht wird, den Gewinn oder Verlust einer Handlungsgeselschaft nach Verhältnis der Einlage eines ieden, oder nach der Zeit, so die Einlage bestehet, oder nach beiden zugleich, einzuteilen. Indessen erstrecket sich ihr Nutzen viel weiter, und sie mus iedesmal angewendet werden, wenn man in einem gegebenem Ganzen die Teile nach Verhältnis, so sie in einem andern Ganzen haben, finden wil; Sie dienet also auch hauptsächlich zu Verkleinerung und Vergrösserung aller Arten von Vermischungen und Zusammensetzungen, die nach einer gewissen Proportion geschehen sol, und wovon der Gebrauch sehr häuffig ist.

Aufgabe.

§. 241. Die einfache Geselschafts-Rechnung zu verrichten.

Auflösung. 1. Bestimmet dasienige Ganze mit seinen besondern Teilen, nach deren Pro-

portion ein anderes Ganze eingeteilet werden sol.

2. Schlüsset nach der Regel de Tri: wie sich das erste Ganze zu dem andern Ganzen verhält, so verhält sich auch der erste Teil des ersten zu dem ersten ähnlichen Teile des andern.

3. Wiederholet diese Regel de Tri so vielmal als Teile das gegebene Ganze bekommen sol, so ist geschehen, was verlanget worden.

Z. B. Man hat einen Feuerwerksatz, so 30 ℔ wieget und aus folgenden Bestandteilen bestehet: 12 ℔ Salpeter, 8 ℔ Schwefel, 3 ℔ Antimonium, 1 ℔ Kohlen, 6 ℔ Pulver.

Man wil aus eben diesen Bestandteilen eine andere Masse machen, so nur 25 ℔ wiegen sol. Es ist demnach die Frage: wie viel von iedem Teile dazu genommen werden sol? Sezet demnach folgende Proportion:

30 ℔ : 25 ℔ = 12 ℔ Salpeter : x = 10 ℔ Salpeter.

Wenn ihr auf diese Art mit iedem Teile fortfahret, so bekomt ihr 6 ℔ 21⅓ Loht Schwefel, 2 ℔ 16 Loht Antimonium, 26⅔ Loth Kohlen und 5 ℔ Pulver.

Oder: 3 Sappeurs haben bei einer Belagerung in der Sappe zusammen 92 Schanzkörbe gesezt, und sind dafür mit 73 fl. 36 kr. bezahlet wor-

den. Der erste hat gesezt 42, der andere 29, und der dritte 21. Man fragt: wie gros eines ieden Anteil an der Bezahlung werde?

Weil nun die ganze Anzahl Schanzkörbe sich zu der Zahl so ein ieder gesezet hat, verhält, wie die Summe der Bezahlung zu dem Anteil eines ieden; so sezet:

92 : 42 = 73 fl. 36 kr. : x =
92 : 29 = 73 fl. 36 kr. : x =
92 : 21 = 73 fl. 36 kr. : x =

33 fl. 36 kr. Anteil des 1.
23 fl. 12 kr. . . . . 2.
16 fl. 48 kr. . . . . 3.

Wil man die Probe dieser Rechnung machen, so darf man nur die gefundene Teile zusammen addiren, und sehen ob ihre Summe das vorher gegebene Ganze ausmache.

Aufgabe.

§. 242. Die zusammengesezte Gesellschaftsrechnung zu verrichten.

Auflösung. 1. Da die zusammengesezte Gesellschaftsrechnung von der einfachen nur darin unterschieden ist, daß die einzelne Regeln de Tri, woraus sie bestehet, zusammengesezet sind §. 240. und folglich die gesuchte Teile eines gegebenen Ganzen in der zusammengesezten Verhältnis der Teile eines andern Ganzen stehen müssen; so bestimmet zuförderst die Säze,

ze, aus welchen die zusammengesezte Verhältnisse entstehen sollen.

2. Multipliciret diese zusammen gehörige Säze durch einander, um die Glieder der Verhältnisse zu bekommen.

3. Addiret alle diese Produkte zu einander, um ihre Summe oder das Ganze davon zu erhalten.

4. Schliesset: wie diese Summe zu dem ersten Produkte so verhält sich das gegebene Ganze zu dem ersten gesuchten Teile.

5. Fahret auf diese Art fort, bis ihr alle Teile bekommen habet, so ist die Rechnung vollendet.

Z. B. Drei Persohnen haben in einem Handel 10000 fl. zusammen geleget, und zwar der erste 5600 fl. durch 3 Monathe, der zweite 3200 fl. durch 4 Monathe, und der dritte 1200 fl. durch 5 Monathe. Ihr ganzer Gewinn beläuft sich auf 1400 fl. Man fraget also: wie gros der Anteil eines ieden werde? Nun mus bei dessen Bestimmung sowohl die Grösse der Einlage als auch die Länge der Zeit in Betrachtung gezogen werden, weil der Gewinn eines ieden desto grösser wird, ie grösser das eine oder das andere ist: Folglich stehen die Anteile am Gewinne in zusammengesezter Verhältnis der Einlagen und der Zeiten. Man multiplicire daher bei einem ieden diese Zahlen durch einander. Nehmlich bei

Den ersten	5600	× 3	=	16800	
zweiten	3200	× 4	=	12800	
dritten	1200	× 5	=	6000	
				35600	Summe der Produkte.

Setzet nunmehro

$35600 : 16800 = 1400 : x =$
$35600 : 12800 = 1400 : x =$
$35600 : 6000 = 1400 : x =$

$660\frac{240}{356}$ Anteil des 1.
$503\frac{132}{356}$ . . . . 2.
$235\frac{340}{356}$ . . . . 3.

Summe 1400 fl. ganzer Gewinn.

Fünftes Hauptstück.

Von der arithmetischen Proportion.

Lehrsatz.

§. 243.

In einer arithmetischen Verhältnis ist das hintere Glied gleich dem vordern, mehr oder weniger ihrem Unterschiede, d. i. wenn $\overset{d}{a,b}$ so ist $b = a \pm d$.

Beweis. In der arithmetischen Verhältnis zeiget der Unterschied an, um wie viel das eine

eine Glied grösser oder kleiner sei als das andere §. 196. Addiret man nun diesen Unterschied zu dem kleinern, so bekomt man das grössere Glied, subtrahiret man hingegen denselben von dem grössern Gliede, so komt das kleinere. Daher ist $b = a \pm d$.

Zusatz.

§. 244. Daher kan man in einer arithmetischen Verhältnis anstaat dem hintern Gliede allezeit dessen Wehrt setzen, und die Verhältnis $a\overset{d}{,}b$ in $a, a \pm d$ verwandeln.

Lehrsatz.

§. 245. In einer arithmetischen Proportion $a\overset{d}{,}b = c\overset{d}{,}f$ ist die Summe der beiden äussersten Glieder gleich der Summe der beiden mitlern, d. i. $a + f = b + c$.

Beweis. Man setze den Unterschied der Verhältnisse $= d$ so kan man anstaat der Proportion $a,b = c,f$ folgende setzen:
$a, a + d = c, c + d$ §. 244. Alsdann ist die Summe der beiden äussersten Glieder $=$ $a + c + d$, und der beiden mitlern $= a + d + c$, folglich sind sie einander gleich.

Z. B. $7,10 = 5,8$ wo $7 + 8 = 10 + 5 = 15$.

Zusatz.

§. 246. Ist es eine stetige Proportion, so ist die Summe der beiden äussersten Glieder gleich dem doppelten mitlern.

Denn wenn a,b = b,c

so ist $a + c = b + b = 2b$.

Wenn ÷ 7, 10, 13,

so ist $7 + 13 = 2 \times 10 = 20$.

Zusatz.

§. 247. Hieraus folget demnach:

1. Zu drei gegebenen Grössen kan die vierte arithmetische Proportionalgrösse gefunden werden. Denn wenn a,b = c,x

so ist $a + x = b + c$ §. 245.

folglich $x = b + c - a$.

2. Zu zwo gegebenen Grössen kan die dritte Proportional gefunden werden.

Denn wenn ÷ a, b, x

so ist $a + x = 2b$ §. 246.

folglich $x = 2b - a$.

3. Zu zwo gegebenen Grössen kan die mitlere Proportional gefunden werden.

Denn wenn ÷ a, x, b

so ist $a + b = 2x$, folglich $\frac{a + b}{2} = x$.

4. Und überhaupt, wenn in einer abgesonderten Proportion drei Glieder, und in einer stetigen zwei derselben gegeben sind, so kan

in

in der ersten allezeit das vierte, und in der andern das dritte gefunden werden.

Denn wenn ∸ a, b = x, c
so ist a + c = b + x,
folglich a + c — b = x, und so auch in den übrigen Fällen.

Lehrsatz.

§. 248. Wenn zwo Summen gleich sind, und man nimt die Grössen der einen zu den äussersten, die Grössen der andern aber zu den mitlern Gliedern an, so stehen die Grössen in einer arithmetischen Proportion.

Beweis. Es sei a + b = c + f, so ist a + b — c = f und a — c = f — b; folglich sind zwischen a und c, ferner zwischen f und b einerlei Unterschiede; daher sind beide Verhältnisse gleich §. 200., und sie machen eine Proportion aus, §. 200. folglich ist a, c = f, b.

Dieser Satz ist der umgekehrte des §. 245.

Es giebt demnach wieder zwei algemeine Kenzeichen, woraus die Richtigkeit der arithmetischen Proportionen beurteilet werden kan, nehmlich

1. Die Gleichheit der Unterschiede der Verhältnisse, und
2. Die Gleichheit der Summen der äussern und mitlern Glieder.

Zu=

Zusatz.

§. 249. Wenn man auf diese Art die meisten bei den geometrischen Proportionen vorgetragene Lehrsätze durchgehet, so wird man finden, daß sie auf eine ähnliche Art auch bei den arithmetischen angewant werden können; nur mit dem Unterschiede, daß dasienige, so bei den erstern durch die Multiplikation und Division geschieht, bei den leztern vermittelst der Addition und Subtraktion geschehen müsse.

Sechstes Hauptstück.

Von den geometrischen Progressionen.

Lehrsatz.

§. 250.

In einer geometrischen Progression von vier Gliedern verhält sich das erste Glied zum vierten, wie der Cubus des ersten zum Cubus des zweiten Gliedes, d. i. wenn $\div\!\div$ a : b : c : d, so ist $a : d = a^3 : b^3$.

Beweis. Denn da diese Progression aus drei gleichen Verhältnissen

$a : b = b : c = c : d$ bestehet §. 203.

so

so setze man $a : b = c : d$
nun ist auch $a^2 : b^2 = a : c$ §. 218.
folglich ist $a^3 : b^3 = ac : dc$ §. 216. Num. 1.
Nun ist $ac : dc = a : d$ §. 215.
Folglich ist $a^3 : b^3 = a : d$ §. 204.

Zusatz.

§. 251. Hieraus fliesset also die Auflösung der Aufgabe: wie man zu zwo gegebenen Grössen zwo mitlere Proportionalgrössen finden könne.

Denn man setze die Progression $\div\!\div\ a : x : y : b$ so ist $a : b = a^3 : x^3$, folglich ist $ax^3 = a^3b$, und also $x^3 = \frac{a^3b}{a}$ das ist $x = \sqrt[3]{\frac{a^3b}{a}}$ so hat man die erste gesuchte Grösse. Hierauf schliesset man weiter $a : x = x : y$, folglich $y = \frac{x^2}{a}$, so hat man auch die andere.

Zusatz.

§. 252. Wenn man auf eine ähnliche Art alle Progressionen untersuchet, aus so viel Gliedern sie auch bestehen mögen, so wird man finden, daß sich überhaupt das erste Glied zu dem lezten verhalte, wie diejenige Potenz des ersten Gliedes, deren Exponent um Eins geringer ist als die Anzahl der Glieder zu eben dieser Potenz des zweiten Gliedes.

Es

Es sei z. B. $\div$ a : b : c : d : f, wo die Progression aus 5 Gliedern bestehet, so ist a : f = $a^4 : b^4$. Ueberhaupt setze man die Anzahl der Glieder = m, und das lezte Glied = p,
so ist a : p = $a^{m-1} : b^{m-1}$.

Hieher gehöret auch der schon §. 218. angeführte Lehrsaz, weil man eine stetige Proportion als eine Progression von drei Gliedern ansehen kan. Woraus zugleich erhellet, wie man zu zwoen Grössen, drei, vier, ia alle mögliche mitlere Proportionalgrössen finden könne.

Z. B. Man sucht zwischen a und b drei mitlere Proportionalgrössen, x, y, z, so ist die Progression $\div$ a : x : y : z : b folglich ist a : b = $a^4 : x^4$.

Daher ist $x^4 = \frac{a^4 b}{a}$ folglich $x = \sqrt[4]{\frac{a^4 b}{a}}$.

Hierauf kan nun nach den vorhergehenden §. auch y und z gefunden werden.

Lehrsaz.

§. 253. In einer geometrischen Progression stehen die Potenzen der Exponenten der Verhältnisse in einer arithmetischen Progression.

Beweis. Es sei die Progression
$\div$ a : b : c : d : e : f u. s. w. und der Exponent der Verhältnisse = m. Da nun in einer ieden geometrischen Verhältnis das vordere Glied aus dem Produkte des hintern Gliedes in den Exponenten bestehet, §. 207. oder, wenn
man

man die Glieder umkehret §. 213., das hintere Glied ein Produkt des erstern in den Exponenten ist; so bestehet in einer Progression iedes nachfolgende Glied aus einem Produkte des zunächst vorhergehenden in den Exponenten.

Dahero ist $b = am$; $c = bm = am^2$ §. 5. Num. 2.
$d = cm = am^3$; $e = dm = am^4$; und
$f = em = am^5$. Setzet man nun anstaat der vorigen Glieder der Progression ihr gleiches so bekomt man
$\div\!\div\; a : am^1 : am^2 : am^3 : am^4 : am^5$ u. s. w.

Zusatz.

§. 254. Hieraus fliesset nun: daß in einer geometrischen Progression ein iedes Glied gleich sei dem Produkte des ersten Gliedes und derienigen Potenz des Exponenten so die Zahl der Glieder anzeiget, so dem gesuchten vorhergehen. Es sei das erste Glied $= a$, der Exponente $= m$, so ist das neunte Glied $= am^8$.

Aufgabe.

§. 255. Aus dem gegebenen ersten Gliede und dem Exponenten ein iedes verlangte Glied der Progression zu finden.

Auflösung. 1. Erhebet den Exponenten zu derienigen Potenz, so die Anzahl der Glie-

der,

der, welche dem verlangten vorhergehen, anzeiget.

2. Multipliciret denselben mit dem ersten Gliede, so habt ihr das verlangte Glied gefunden §. 254.

Z. B. Es sei das erste Glied $= 4$ der Exponent $= 3$, man verlangt das fünfte Glied der Progression zu finden;
so ist solches $= 3^4 \times 4 = 81 \times 4 = 324$.
Nehmlich die ganze Progression ist
$4 \overset{3}{:} 12 \overset{3}{:} 36 \overset{3}{:} 108 \overset{3}{:} 324$ u. s. w.

Zusatz.

§. 256. Würde die Aufgabe umgekehrt, und es solte aus einem gegebenem Gliede nebst dem Exponenten das erste Glied gefunden werden; so sei das erste gesuchte Glied $= x$ der Exponent $= m$, das gegebene Glied $= a$, und die Anzahl der Glieder, so ihm vorhergehen $= n$, so ist $a = xm^n$ folglich $\frac{a}{m^n} = x$.

Z. B. Es wäre in voriger Progression das vierte te Glied $= 108$ nebst dem Exponenten $= 3$ gegeben, so ist $x = \frac{108}{3^3} = \frac{108}{27} = 4$.

Aufgabe.

§. 257. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede samt der Zahl der Glieder einer geo-

geometrischen Progression den Exponenten zu finden.

Auflösung. Es sei das erste Glied = a, das lezte = b die Anzahl der Glieder = n, und der Exponent = x.

So ist $b = ax^{n-1}$ §. 254.

$$\frac{b}{a} = x^{n-1}$$

folglich $\sqrt[n-1]{\frac{b}{a}} = x.$

Z. B. Es sei a = 2, b = 486, n = 6,

so ist $x = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = 3.$

Wäre die Anzahl der Glieder so gros, daß eine Wurzel von einem sehr hohen Grade auszuziehen wäre, welches in der Ausübung beschwerlich fallen würde, so kan man sich dabei der Logarithmen bedienen, wovon in folgendem.

Lehrsatz.

§. 258. In einer geometrischen Progression ist das Produkt der beiden äussersten Glieder gleich dem Produkte zweier mitlern so von den äussersten gleich weit abstehen, und wenn sie an der Zahl ungleich sind, dem Quadrate des mitlern.

Beweis. Es sei die Progression

$a \overset{m}{:} b \overset{m}{:} c \overset{m}{:} d \overset{m}{:} e \overset{m}{:} f \overset{m}{:} g$, und nach §. 253.

$a : am : am^2 : am^3 : am^4 : am^5 : am^6$, so ist

$a \times am^6 = a^2m^6$;

$am \times am^5 = a^2m^6$;

$am^2 \times am^4 = a^2m^6$; und

$am^3 \times am^3 = a^2m^6$.

Aufgabe.

§. 259. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede samt dem Exponenten einer geometrischen Progression die Summe aller Glieder zu finden, oder die Progression zu summiren.

Auflösung. Es sei die Progression.

$\overset{m}{a} : \overset{m}{b} : \overset{m}{c} : \overset{m}{d} : \overset{m}{e} : f$,

so ist $b = am$, $c = bm$, $d = cm$, $e = dm$ und $f = em$ §. 253.

Folglich ist $b + c + d + e + f =$ $(a + b + c + d + e)m$,

das ist: die Summe aller Glieder weniger dem ersten ist gleich der Summe aller Glieder weniger dem lezten, multipliciret durch den Exponenten.

Nun sei die Summe aller Glieder der Progression $= S$,

so ist $S - a = (S - f)m = Sm - fm$,

daher ist $fm - a = Sm - S = S(m - 1)$

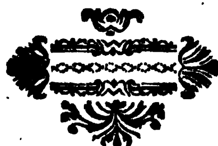
d. i. $\dfrac{fm - a}{m - 1} = S$.

Mul-

Multipliciret demnach das lezte Glied mit dem Exponenten, ziehet hievon das erste Glied ab, und den Ueberrest dividiret mit den um Eins verringerten Exponenten, so ist der Quotient die verlangte Summe.

Z. B. Es sei das erste Glied = 4, das lezte = 108 und der Exponent = 3 so ist nach obiger Formul $\frac{108 \times 3 - 4}{3 - 1} = \frac{320}{2} = 160 = x$ oder die Summe der Progression.

Es sind demnach zur Summirung der geometrischen Progressionen die drei Stücke zu wissen nöhtig, nehmlich das erste und lezte Glied samt dem Exponenten. Wären an deren staat einige andere gegeben, so müssen sie doch nach den vorhergehenden Aufgaben daraus berechnet werden; und wenn nicht hinlängliche Grössen dazu gegeben sind, so ist die Aufgabe unbestimt.



Siebentes Hauptstück.

Von den arithmetischen Progressionen.

Lehrsatz.

§. 260.

In einer arithmetischen Progression ist ein iedes Glied gleich dem ersten mehr oder weniger dem Unterschiede so vielmal genommen, als Glieder ihm vorhergehen.

Beweis. Es sei die Progression
a, b, c, e, f, g und der Unterschied $= d$, so ist $b = a \pm d$, $c = b \pm d = a \pm 2d$, $e = c \pm d = a \pm 3d$, $f = e \pm d = a \pm 4d$ und $g = f \pm d = a \pm 5d$ §. 243. 244. Folglich bekomt man folgende Progression.
$a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d, a \pm 4d, a \pm 5d$ u. s. w.

Ist die Progression aufsteigend, so ist die Differenz positiv, ist sie aber absteigend, so ist sie negativ §. 203. welches durchgängig bei dem folgenden zu merken ist, wo um der Kürze willen die Differenz mehrenteils als positiv wird angenommen werden.

Zu-

Zusatz.

§. 261. Es ist daher ein iedes Glied der Progression gleich der Summe des ersten Gliedes und der Differenz so vielmal genommen als Glieder vorhanden sind, weniger Eins.

Es sei daher das erste Glied $= a$, der Unterschied $= d$, ein iedes verlangte Glied $= t$, die Anzahl der Glieder $= n$, so haben wir für iedes Glied die algemeine Formul $t = a \pm nd - d$.

Aufgabe.

§. 262. Aus dem gegebenen ersten oder lezten Gliede einer arithmetischen Progression samt dem Unterschiede ein iedes Glied zu finden.

Auflösung. 1. Ist das erste Glied bekant, so ist iedes verlangte Glied
$t = a \pm dn - d$ §. 261.

2. Ist das lezte Glied bekant, oder auch ein iedes andere, wenn nur die Zahl der Glieder bis auf ihn zugleich mit bestimmet ist, und es sol daraus das erste Glied gefunden werden, so ist nach der vorigen Formul

$$t - dn + d = a.$$

Z. B. Es wäre $a = 4$, $d = 3$ und $n = 7$, so ist das siebente Glied =

$$t = 4 + 21 - 3 = 22.$$

Wäre aber t bekant = 22 und es sol a gefunden werden, so ist a = 22 — 21 + 3 = 4.

Aufgabe.

§. 263. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede, samt der Anzahl der Glieder den Unterschied zu finden.

Auflösung. Weil $t = a + dn - d$ §. 261. so ist $t - a = dn - d$

folglich $\frac{t - a}{n - 1} = d.$

Nach vorigem Beispiele ist

$$d = \frac{22 - 4}{7 - 1} = \frac{18}{6} = 3.$$

Aufgabe.

§. 264. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede samt dem Unterschiede die Anzahl der Glieder zu finden.

Auflösung. Weil $t = a + dn - d$ §. 261. so ist $t - a + d = dn$

folglich $\frac{t - a + d}{d} = n.$

In dem vorigen Beispiele ist also

$$n = \frac{22 + 3 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

Lehr=

Lehrsatz.

§. 265. In einer arithmetischen Progression ist die Summe der beiden äussersten Glieder gleich der Summe zweier mitlern, so von den äussersten gleich weit abstehen, und wenn sie an der Zahl ungleich sind, doppelt so gros als das mitlere.

Beweis. Es sei die Progression:

$$a \overset{d}{,} b \overset{d}{,} c \overset{d}{,} e \overset{d}{,} f \overset{d}{,} g \overset{d}{,} h,$$

oder $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d,$
$a + 5d, a + 6d,$

so ist $a + a + 6d = 2a + 6d;$
$a + d + a + 5d = 2a + 6d;$
$a + 2d + a + 4d = 2a + 6d;$
$a + 3d + a + 3d = 2a + 6d.$

Zusatz.

§. 266. Ist das erste Glied der Progression = 0, so ist das lezte Glied allein gleich der Summe zweier andern, so von den äussersten gleich weit abstehen; und eine solche Progression ist nichts wiedersprechendes, weil zwischen Nulle und einer würklichen Zahl eine wahre Zahl zum Unterschiede vorhanden sein mus.

Z. B. $0 \overset{2}{,} 2 \overset{2}{,} 4 \overset{2}{,} 6 \overset{2}{,} 8 \overset{2}{,} 10$, u. s. w.

Zusatz.

§. 267. Da nun die Summen zweier von den äussersten gleich weit entfernten Glieder allezeit einander gleich sind, so bekomt ihr, wenn ihr diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret, die ganze Summe der Progression. Oder: die Summe des ersten und lezten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret, ist die Summe der Progression. Es sei demnach das erste Glied $= a$, das lezte $= t$, die Anzahl der Glieder $= n$, und die Summe der Progression $= S$, so ist $\frac{(a + t) n}{2} = S$.

Aufgabe.

§. 268. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede, samt der Anzahl der Glieder die Progression zu summiren.

Auflösung. 1. Addiret das erste und lezte Glied zusammen.

2. Multipliciret diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder.

Z. B. Es sei das erste Glied $= 2$, das lezte $= 20$, und ihre Anzahl $= 7$ so ist ihre Summe $= \frac{(2 + 20) \times 7}{2} = 77$.

Zusatz.

§. 269. 1. Wenn das erste Glied $= 0$, so erhält man die Summe, wenn man das lezte Glied allein mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret.

2. Auf diese Art kan man alle natürliche Zahlen zusammen summiren, weil sie eine arithmetische Progression ausmachen, deren Unterschied $= 1$ ist.

1 1 1 1 1 1 1
Z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w.
Die Summe davon ist $(8 + 1) \times 4 = 36$ wo das lezte Glied zugleich die Anzahl der Glieder anzeiget.

Aufgabe.

§. 270. Aus dem ersten Gliede, der Summe der Progression und der Anzahl der Glieder, den Unterschied derselben zu finden.

Auflösung. Es sei wiederum das erste Glied $= a$, die Summe $= S$, die Anzahl der Glieder $= n$, und der gesuchte Unterschied $= d$; so ist nach §. 262. Num. 1. das lezte Glied $= t = a + dn - d$;

Da nun $S = \frac{an + tn}{2}$ §. 267. so kan man anstaat t den Wehrt davon setzen,

so bekomt man $S = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$,

der, welche dem verlangten vorhergehen, anzeiget.

2. Multipliciret denselben mit dem ersten Gliede, so habt ihr das verlangte Glied gefunden §. 254.

Z. B. Es sei das erste Glied = 4 der Exponent = 3, man verlangt das fünfte Glied der Progression zu finden;
so ist solches $= 3^4 \times 4 = 81 \times 4 = 324$.
Nehmlich die ganze Progression ist

$$4 \overset{3}{:} 12 \overset{3}{:} 36 \overset{3}{:} 108 \overset{3}{:} 324$$ u. s. w.

Zusatz.

§. 256. Würde die Aufgabe umgekehrt, und es solte aus einem gegebenem Gliede nebst dem Exponenten das erste Glied gefunden werden; so sei das erste gesuchte Glied = x der Exponent = m, das gegebene Glied = a, und die Anzahl der Glieder, so ihm vorhergehen = n, so ist $a = xm^n$ folglich $\frac{a}{m^n} = x$.

Z. B. Es wäre in voriger Progression das vierte te Glied = 108 nebst dem Exponenten = 3 gegeben, so ist $x = \frac{108}{3^3} = \frac{108}{27} = 4$.

Aufgabe.

§. 257. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede samt der Zahl der Glieder einer geo-

geometrischen Progression den Exponenten zu finden.

Auflösung. Es sei das erste Glied $= a$, das lezte $= b$ die Anzahl der Glieder $= n$, und der Exponent $= x$.

So ist $b = ax^{n-1}$ §. 254.

$$\frac{b}{a} = x^{n-1}$$

folglich $\sqrt[n-1]{\frac{b}{a}} = x$.

Z. B. Es sei $a = 2, b = 486, n = 6$,

so ist $x = \sqrt[5]{\frac{486}{2}} = 3$.

Wäre die Anzahl der Glieder so gros, daß eine Wurzel von einem sehr hohen Grade auszuziehen wäre, welches in der Ausübung beschwerlich fallen würde, so kan man sich dabei der Logarithmen bedienen, wovon in folgendem.

Lehrsatz.

§. 258. In einer geometrischen Progression ist das Produkt der beiden äussersten Glieder gleich dem Produkte zweier mitlern so von den äussersten gleich weit abstehen, und wenn sie an der Zahl ungleich sind, dem Quadrate des mitlern.

Beweis. Es sei die Progression

$$\overset{m}{a} : \overset{m}{b} : \overset{m}{c} : \overset{m}{d} : \overset{m}{e} : \overset{m}{f} : g,$$ und nach §. 253.

$a : am : am^2 : am^3 : am^4 : am^5 : am^6$, so ist

$a \times am^6 = a^2m^6$;

$am \times am^5 = a^2m^6$;

$am^2 \times am^4 = a^2m^6$; und

$am^3 \times am^3 = a^2m^6$.

Aufgabe.

§. 259. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede samt dem Exponenten einer geometrischen Progressjon die Summe aller Glieder zu finden, oder die Progression zu summiren.

Auflösung. Es sei die Progression.

$\overset{m}{a} : \overset{m}{b} : \overset{m}{c} : \overset{m}{d} : \overset{m}{e} : f$,

so ist $b = am$, $c = bm$, $d = cm$, $e = dm$ und $f = em$ §. 253.

Folglich ist $b + c + d + e + f =$

$(a + b + c + d + e)m$,

das ist: die Summe aller Glieder weniger dem ersten ist gleich der Summe aller Glieder weniger dem lezten, multipliciret durch den Exponenten.

Nun sei die Summe aller Glieder der Progression $= S$,

so ist $S - a = (S - f)m = Sm - fm$,

daher ist $fm - a = Sm - S = S(m - 1)$

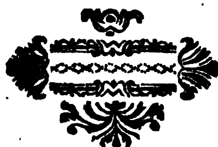
d. i. $\dfrac{fm - a}{m - 1} = S$.

Mul-

Multipliciret demnach das lezte Glied mit dem Exponenten, ziehet hievon das erste Glied ab, und den Ueberrest dividiret mit den um Eins verringerten Exponenten, so ist der Quotient die verlangte Summe.

Z. B. Es sei das erste Glied = 4, das lezte = 108 und der Exponent = 3 so ist nach obiger Formul $\frac{108 \times 3 - 4}{3 - 1} = \frac{320}{2} = 160 = x$ oder die Summe der Progression.

Es sind demnach zur Summirung der geometrischen Progressionen die drei Stücke zu wissen nöhtig, nehmlich das erste und lezte Glied samt dem Exponenten. Wären an deren staat einige andere gegeben, so müssen sie doch nach den vorhergehenden Aufgaben daraus berechnet werden; und wenn nicht hinlängliche Grössen dazu gegeben sind, so ist die Aufgabe unbestimt.



Siebentes Hauptstück.

Von den arithmetischen Progressionen.

Lehrsatz.

§. 260.

In einer arithmetischen Progression ist ein iedes Glied gleich dem ersten mehr oder weniger dem Unterschiede so vielmal genommen, als Glieder ihm vorhergehen.

Beweis. Es sei die Progression a, b, c, e, f, g und der Unterschied $= d$, so ist $b = a \pm d$, $c = b \pm d = a \pm 2d$, $e = c \pm d = a \pm 3d$, $f = e \pm d = a \pm 4d$ und $g = f \pm d = a \pm 5d$ §. 243. 244. Folglich bekomt man folgende Progression. $a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d, a \pm 4d, a \pm 5d$ u. s. w.

Ist die Progression aufsteigend, so ist die Differenz positiv, ist sie aber absteigend, so ist sie negativ §. 203. welches durchgängig bei dem folgenden zu merken ist, wo um der Kürze willen die Differenz mehrenteils als positiv wird angenommen werden.

Zusaz.

§. 261. Es ist daher ein iedes Glied der Progression gleich der Summe des ersten Gliedes und der Differenz so vielmal genommen als Glieder vorhanden sind, weniger Eins.

Es sei daher das erste Glied = a, der Unterschied = d, ein iedes verlangte Glied = t, die Anzahl der Glieder = n, so haben wir für iedes Glied die algemeine Formul $t = a \pm nd - d$.

Aufgabe.

§. 262. Aus dem gegebenen ersten oder lezten Gliede einer arithmetischen Progression samt dem Unterschiede ein iedes Glied zu finden.

Auflösung. 1. Ist das erste Glied bekant, so ist iedes verlangte Glied
$t = a \pm dn - d$ §. 261.

2. Ist das lezte Glied bekant, oder auch ein iedes andere, wenn nur die Zahl der Glieder bis auf ihn zugleich mit bestimmet ist, und es sol daraus das erste Glied gefunden werden, so ist nach der vorigen Formul

$$t - dn + d = a.$$

Z. B. Es wäre $a = 4$, $d = 3$ und $n = 7$, so ist das siebente Glied =

$$t = 4 + 21 - 3 = 22.$$

Wäre aber t bekant = 22 und es sol a gefunden werden, so ist $a = 22 - 21 + 3 = 4$.

Aufgabe.

§. 263. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede, samt der Anzahl der Glieder den Unterschied zu finden.

Auflösung. Weil $t = a + dn - d$ §. 261. so ist $t - a = dn - d$

folglich $\frac{t - a}{n - 1} = d$.

Nach vorigem Beispiele ist

$$d = \frac{22 - 4}{7 - 1} = \frac{18}{6} = 3.$$

Aufgabe.

§. 264. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede samt dem Unterschiede die Anzahl der Glieder zu finden.

Auflösung. Weil $t = a + dn - d$ §. 261. so ist $t - a + d = dn$

folglich $\frac{t - a + d}{d} = n$.

In dem vorigen Beispiele ist also

$$n = \frac{22 + 3 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7.$$

Lehr-

Lehrsatz.

§. 265. In einer arithmetischen Progression ist die Summe der beiden äussersten Glieder gleich der Summe zweier mitlern, so von den äussersten gleich weit abstehen, und wenn sie an der Zahl ungleich sind, doppelt so gros als das mitlere.

Beweis. Es sei die Progression:

$$\overset{d}{a}, \overset{d}{b}, \overset{d}{c}, \overset{d}{e}, \overset{d}{f}, \overset{d}{g}, h,$$

oder $a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d,$
$a + 5d, a + 6d,$

so ist $a + a + 6d = 2a + 6d;$
$a + d + a + 5d = 2a + 6d;$
$a + 2d + a + 4d = 2a + 6d;$
$a + 3d + a + 3d = 2a + 6d.$

Zusatz.

§. 266. Ist das erste Glied der Progression $= 0$, so ist das lezte Glied allein gleich der Summe zweier andern, so von den äussersten gleich weit abstehen; und eine solche Progression ist nichts wiedersprechendes, weil zwischen Nulle und einer würklichen Zahl eine wahre Zahl zum Unterschiede vorhanden sein mus.

Z. B. $\overset{2}{0}, \overset{2}{2}, \overset{2}{4}, \overset{2}{6}, \overset{2}{8}, 10$, u. s. w.

Zusatz.

§. 267. Da nun die Summen zweier von den äussersten gleich weit entfernten Glieder allezeit einander gleich sind, so bekomt ihr, wenn ihr diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret, die ganze Summe der Progression. Oder: die Summe des ersten und lezten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret, ist die Summe der Progression. Es sei demnach das erste Glied $= a$, das lezte $= t$, die Anzahl der Glieder $= n$, und die Summe der Progression $= S$, so ist $\frac{(a + t)n}{2} = S$.

Aufgabe.

§. 268. Aus dem gegebenen ersten und lezten Gliede, samt der Anzahl der Glieder die Progression zu summiren.

Auflösung. 1. Addiret das erste und lezte Glied zusammen.

2. Multipliciret diese Summe mit der halben Anzahl der Glieder.

Z. B. Es sei das erste Glied $= 2$, das lezte $= 20$, und ihre Anzahl $= 7$ so ist ihre Summe $= \frac{(2 + 20) \times 7}{2} = 77$.

Zu-

Zusatz.

§. 269. 1. Wenn das erste Glied = 0, so erhält man die Summe, wenn man das lezte Glied allein mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret.

2. Auf diese Art kan man alle natürliche Zahlen zusammen summiren, weil sie eine arithmetische Progression ausmachen, deren Unterschied = 1 ist.

Z. B. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 u. s. w.
Die Summe davon ist $(8 + 1) \times 4 = 36$ wo das lezte Glied zugleich die Anzahl der Glieder anzeiget.

Aufgabe.

§. 270. Aus dem ersten Gliede, der Summe der Progression und der Anzahl der Glieder, den Unterschied derselben zu finden.

Auflösung. Es sei wiederum das erste Glied = a, die Summe = S, die Anzahl der Glieder = n, und der gesuchte Unterschied = d; so ist nach §. 262. Num. 1. das lezte Glied $= t = a + dn - d$;

Da nun $S = \frac{an + tn}{2}$ §. 267. so kan man anstaat t den Wehrt davon setzen,

so bekomt man $S = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$,

folglich $2S = 2an + dn^2 - dn$
also $2S - 2an = dn^2 - dn$
daher ist $\frac{2S - 2an}{n^2 - n} = d.$

Z. B. Wäre $a = 2$, $S = 77$ und $n = 7$,
so ist $d = \frac{77 \times 2 - 2 \times 2 \times 7}{49 - 7} = 3.$

Zusatz.

§. 271. Weil $S = \frac{an + tn}{2}$ §. 267. so ist

1. $2S = an + tn$
$\frac{2S}{a + t} = n.$

2. $2S = an + tn$
$2S - an = tn$
$\frac{2S - an}{n} = t$

3. $2S = an + tn$
$2S - tn = an$
$\frac{2S - tn}{n} = a.$

Welche Formuln als die Auflösungen eben so vieler verschiedener Aufgaben angesehen werden können, zu deren mehrern noch die vorhergehende Gleichungen Anlas geben.

Zu-

Zusatz.

§. 272. Die vornehmste Aehnlichkeit zwischen den arithmetischen und geometrischen Progressionen, so wie bei dergleichen Proportionen §. 249. bestehet darin, daß was bei den leztern in Absicht auf die Multiplikation und Division geschieht, bei den erstern durch die Addition und Subtraktion staat findet, verglichen §. 253. 254. 258. und 260. 261. 265.

Von Summirung der Quadrate der natürlichen Zahlen.

Lehrsatz.

§. 273. Die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen, so von 1 anfangen, und in einer arithmetischen Progression deren Unterschied 1 ist, fortgehen, bestehet

1. Aus dem sechsten Teil des zweifachen Cubus des lezten Gliedes.

2. Aus dem sechsten Teil des dreifachen Quadrats eben desselben, und

3. Aus dem sechsten Teil des lezten Gliedes selbst.

Beweis. Man drücke die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w. durch a, b, c, d, e, f u. s. w. aus, so sage ich:

daß

daß $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2f^3 + 3f^2 + f}{6}$.

1. Denn da in einer arithmetischen Progression ein jedes Glied gleich ist dem vorhergehenden samt dem Unterschiede §. 243. 244. so bekommen wir folgende Gleichungen:

$$f = e + 1$$
$$e = d + 1$$
$$d = c + 1$$
$$c = b + 1$$
$$b = a + 1.$$

2. Erheben wir nun diese Gleichungen erstlich auf die zwote und dann auf die dritte Potenz, so entstehen

die Quadrate	und die Cubi
$f^2 = e^2 + 2e + 1$	$f^3 = e^3 + 3e^2 + 3e + 1$
$e^2 = d^2 + 2d + 1$	$e^3 = d^3 + 3d^2 + 3d + 1$
$d^2 = c^2 + 2c + 1$	$d^3 = c^3 + 3c^2 + 3c + 1$
$c^2 = b^2 + 2b + 1$	$c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$
$b^2 = a^2 + 2a + 1$	$b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$

3. Addiren wir die Gleichungen der Quadraten und auch der Cuborum zusammen, so ist die Summe der Quadraten

$f^2 + e^2 + d^2 + c^2 + b^2 =$
$e^2 + d^2 + c^2 + b^2 + a^2 +$
$2e + 2d + 2c + 2b + 2a + 5$ und die Summe der Cuborum

f^3

$$f^3 + e^3 + d^3 + c^3 + b^3 =$$
$$e^3 + d^3 + c^3 + b^3 + a^3 +$$
$$3e^2 + 3d^2 + 3c^2 + 3b^2 + 3a^2 +$$
$$3e + 3d + 3c + 3b + 3a + 5.$$

Lässet man nun in beiden Gliedern dieser Gleichungen die gleiche Grössen verschwinden, so ist die erste Gleichung
$f^2 = a^2 + 2e + 2d + 2c + 2b + 2a + 5$
und die zwote
$f^3 = a^3 + 3e^2 + 3d^2 + 3c^2 + 3b^2 + 3a^2 + 3e + 3d + 3c + 3b + 3a + 5$, das ist: das Quadrat des lezten Gliedes ist gleich dem Quadrate des ersten, mehr der doppelten Summe aller Glieder, so dem lezten vorhergehen, mehr eben so viel Einheiten als Glieder vor dem lezten sind.

Und der Cubus des lezten Gliedes ist gleich dem Cubus des ersten, mehr der dreifachen Summe der Quadraten aller dem lezten vorgehenden Glieder, mehr der dreifachen Summe aller Glieder ohne dem lezten, mehr so viel Einheiten als dem lezten Gliede vorgehen.

4. Um nun diese zwo Gleichungen etwas zu verkürzen, so wollen wir annehmen, die Summe aller Glieder sei $= R$; die Summe ihrer Quadrate $= S$ und die Summe ihrer Cuborum $= T$; so ist die Summe der dem lezten vorgehenden Glieder $= R - f$; die

Sum-

Summe der Quadrate derselben $= S - f^2$; und die Summe ihrer Cuborum $= T - f^3$. Endlich da die Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung fortgehen, so ist die Anzahl der dem lezten vorgehenden Glieder $= f - a$.

Dieser Benennungen zu Folge können wir erstlich in der Gleichung der Quadraten anstaat der doppelten Summe aller Glieder ausser dem lezten setzen $2R - 2f$; und anstaat so vielen Einheiten als dem lezten Gliede vorgehen, $f - a$; wodurch wir nunmehro bekommen $f^2 = a^2 + 2R - 2f + f - a$, oder $f^2 = a^2 + 2R - f - a$.

Zweitens in der Gleichung der Cuborum setzen wir anstaat der dreifachen Summe der Quadrate aller dem lezten vorgehenden Glieder $3S - 3f^2$; anstaat der dreifachen Summe aller Glieder ohne dem lezten $3R - 3f$; und anstaat so vieler Einheiten als dem lezten Gliede vorgehen $f - a$; so können wir die vorige Gleichung der Cuborum folgendergestalt verkürzen:

$f^3 = a^3 + 3S - 3f^2 + 3R - 3f + f - a$

oder $f^3 = a^3 + 3S - 3f^2 + 3R - 2f - a$.

5. In der Gleichung der Quadrate finden wir den Wehrt von R, wenn wir erstlich setzen: $f^2 - a^2 + a + f = 2R$

folglich $\frac{f^2 - a^2 + a + f}{2} = R$ und in der

Glei-

Gleichung der Cuborum bekommen wir den Wehrt von S, wenn wir setzen:

$$f^3 + 3f^2 + 2f - a^3 + a - 3R = 3S$$ also

$$\frac{f^3 + 3f^2 + 2f - a^3 + a - 3R}{3} = S.$$

Ferner um in dieser lezten Gleichung das R im ersten Gliede wegzuschaffen, wollen wir dafür dessen vorher gefundenen Wehrt setzen, so ist $\frac{f^3 + 3f^2 + 2f - a^3 + a}{3}$

$$- \frac{f^2 + a^2 - a - f}{2} = S$$

und diese zween Brüche auf einerlei Nenner gebracht, geben

$$\frac{2f^3 + 6f^2 + 4f - 2a^3 + 2a - 3f^2 + 3a^2 - 3a - 3f}{6}$$

$= S$ oder $\frac{2f^3 + 3f^2 + f - 2a^3 + 3a^2 - a}{6}$

$= S.$

6. Da wir das erste Glied der Progression $a = 1$ angenommen haben, so ist

$a^2 = 1;$

$3a^2 = 3,$ und

$a^3 = 1;$ folglich

$2a^3 = 2,$ und wir bekommen also

$\frac{3a^2 - 2a^3 - a}{6} = \frac{3 - 2 - 1}{6} = 0;$ wel-

ches

ches ein Zeichen ist, daß sich diese Grössen selbst aufheben; dahero ist endlich die Gleichung:

$$\frac{2f^3 + 3f^2 + f}{6} = S.$$

Zusatz.

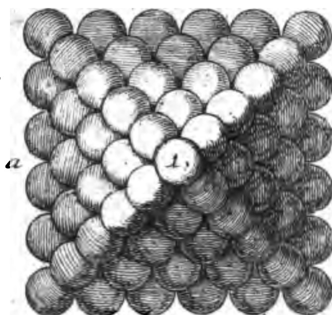
§. 274. Wenn wir das erste Glied der obigen Gleichung in seine Faktoren zergliedern, so bekommen wir: $\frac{f^2 + f}{2} \times \frac{2f + 1}{3} = S$, den Ausdruck der Summe der Quadrate etwas einfacher, und kan solcher zu einer algemeinen Formul zu Berechnung derselben dienen, wenn ihre Wurzeln von 1 anfangen und die natürliche Zahlen vorstellen, davon die lezte bekant ist. Fänget aber die Progression nicht von 1 sondern von einer andern Zahl an, so siehet man leicht, daß zwar die Formul sich in etwas ändern, iedoch auf dem nehmlichen Grunde beruhen müsse, und dahero ebenfals leicht gefunden werden könne.

Anwendung des vorhergehenden Lehrsatzes zu Berechnung der Kugelschlichtungen.

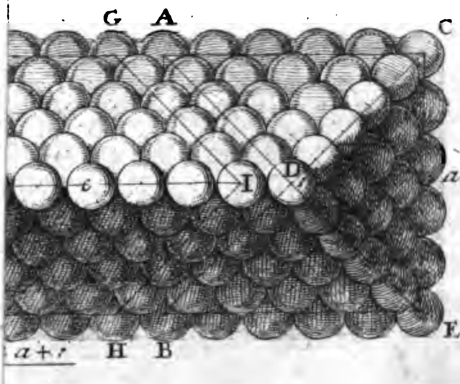
§. 275. Die vornehmsten Gattungen von Körpern in welche die Kugeln, Bomben und Grenaden in den Zeughäusern aufgeschlichtet zu werden pflegen, sind vierfach, nehmlich:

1. Py-

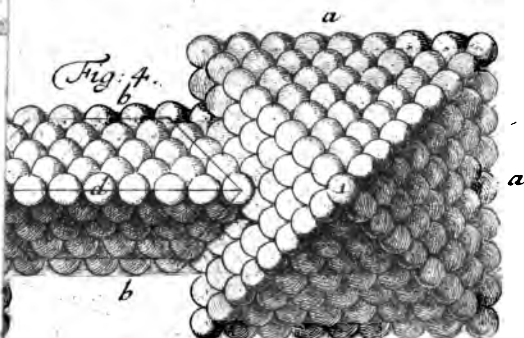
Fig: 1.



$\frac{aa+a}{2} \times \frac{2a+1}{3}$



a+1



$\frac{a+1}{3}) + \frac{cc+c}{2} \times \frac{2b+d}{3}$

ches ein Zeichen ist, daß sich diese Grössen selbst aufheben; dahero ist endlich die Gleichung:

$$\frac{2f^3 + 3f^2 + f}{6} = S.$$

Zusaz.

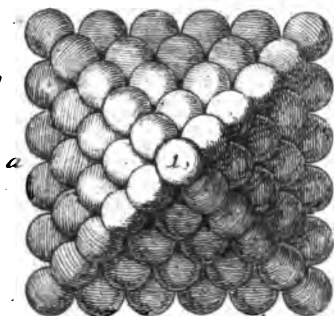
§. 274. Wenn wir das erste Glied der obigen Gleichung in seine Faktoren zergliedern, so bekommen wir: $\frac{f^2 + f}{2} \times \frac{2f + 1}{3} = S$, den Ausdruck der Summe der Quadrate etwas einfacher, und kan solcher zu einer algemeinen Formul zu Berechnung derselben dienen, wenn ihre Wurzeln von 1 anfangen und die natürliche Zahlen vorstellen, davon die lezte bekant ist. Fänget aber die Progression nicht von 1 sondern von einer andern Zahl an, so siehet man leicht, daß zwar die Formul sich in etwas ändern, iedoch auf dem nehmlichen Grunde beruhen müsse, und dahero ebenfals leicht gefunden werden könne.

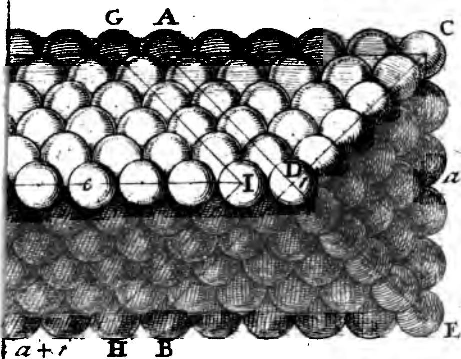
Anwendung des vorhergehenden Lehrsatzes zu Berechnung der Kugelschlichtungen.

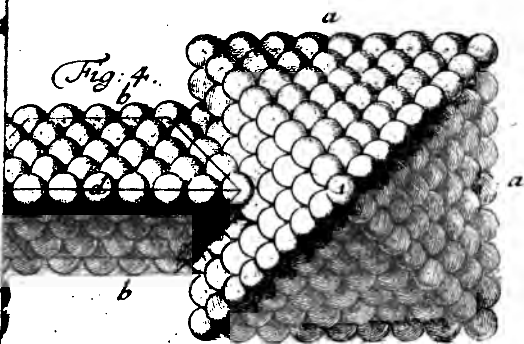
§. 275. Die vornehmsten Gattungen von Körpern in welche die Kugeln, Bomben und Grenaden in den Zeughäusern aufgeschlichtet zu werden pflegen, sind vierfach, nehmlich:

1. Py-

Fig: 1.







1. Pyramiden, deren Grundfläche ein volkommenes Quadrat ist, wie Fig. 1.

2. Pyramiden deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist, wie Fig. 2.

3. Pyramiden, deren Grundfläche ein länglichtes Viereck ist, wie Fig. 3. und

4. Ein aus dem ersten und lezten zusammengesezter Körper, wie Fig. 4.

Die Berechnung aller dieser Gattungen kan nun nach dem vorhergehenden Lehrsatze folgendergestalt geschehen.

Aufgabe.

§. 276. Die Anzahl Kugeln, so in einer Pyramide, deren Grundfläche ein Quadrat ist, enthalten, zu berechnen, wenn die Zahl der Kugeln an einer Seite der Grundfläche gegeben ist.

Auflösung. Da alle Lagen der Kugeln über einander in dieser Pyramide aus lauter Quadraten bestehen, deren Seiten oder Wurzeln, so wie sie auf einander folgen, beständig um 1 unterschieden sind, bis auf die oberste Kugel, so ebenfals als ein Quadrat, deren Wurzel = 1 anzusehen ist; so sind die Wurzeln dieser Quadrate oder dieser Lagen der Kugelschlichtung die natürlichen Zahlen von 1 angefangen, und stellen folglich eine arithmetische Progression vor, deren erstes Glied = 1, und das lezte die Seite der Grundfläche ist.

Nun haben wir in dem vorhergehendem Lehrsatze gesehen, daß die Formul

$$\frac{f^2 + f}{2} \times \frac{2f + 1}{3}$$

die Summe aller dieser Quadrate enthalte §. 273. folglich zeiget sie auch zugleich die Summe aller in der Pyramide enthaltenen Kugeln an, wenn durch f die Seite der Grundfläche derselben, als das lezte Glied der Progression vorgestellet wird.

Z. B. In Fig. 1. hätte die Seite der Grundfläche 6 Kugeln, so ist die Summe der ganzen Pyramide $= \frac{36 + 6}{2} \times \frac{12 + 1}{3} = 91$ Kugeln.

Aufgabe.

§. 277. Die Anzahl Kugeln, so in einer dreieckigten Pyramide, oder deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist Fig. 2. enthalten, zu berechnen.

Auflösung. Gleichwie bei der viereckigten Pyramide die Lagen der Kugeln Quadrate der natürlichen Zahlen sind, eben so sind auch bei der dreieckigten die über einander geschlichtete Lagen von Kugeln als gleichseitige Dreiecke anzusehen, deren Seiten ebenfals in der Ordnung der natürlichen Zahlen, von der Grundfläche an bis auf 1 fortgehen.

Jede dieser Lagen oder Dreiecke machet nun wieder eine arithmetische Progression aus, deren erstes Glied = 1, das lezte die Seite des Dreiecks, oder ihre Grundlinie, und der Unterschied = 1 ist; und die oberste Kugel kan ebenfals als ein Dreieck angesehen werden, dessen Seite = 1 ist.

Nun findet man die Summe einer solchen Progression, folglich auch die Zahl der in ieder Lage befindlichen Kugeln, wenn man die Summe des ersten und lezten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multipliciret §. 268. Sezet man dahero die Seite der Grundfläche = f, und die oberste Kugel = 1, so ist die Summe des ersten und lezten Gliedes der Progression = f + 1, die halbe Anzahl der Glieder = $\frac{f}{2}$ und die Summe der Glieder, oder der Grundlage der Pyramide $(f + 1) \times \frac{f}{2} = \frac{f^2 + f}{2}$.

Benennen wir nun auch die übrigen Seiten der auf einander folgenden Lagen, nehmlich die zweite = e, die dritte = d, die vierte = c, die fünfte = b und die oberste = a, so bekommen wir auf eine gleichförmige Art den Inhalt aller Lagen, nehmlich für die

1. oder die Grundlage $= \frac{f^2 + f}{2}$

2. .... $= \frac{e^2 + e}{2}$

3. .... $= \frac{d^2 + d}{2}$

4. .... $= \frac{c^2 + c}{2}$

5. .... $= \frac{b^2 + b}{2}$

und die oberste....... $= \frac{a^2 + a}{2}$

folglich ist die Summe aller dieser Lagen $=$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + a + b + c + d + e + f}{2}$$

Dahero ist der Inhalt der ganzen Pyramide oder die Anzahl der darin enthaltenen Kugeln gleich der halben Summe aller Quadrate der Seiten der Lagen, mehr der halben Summe dieser Lagen selbsten.

Nun haben wir in dem vorhergehenden Lehrsatze zur Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen die algemeine Formul $\frac{2f^3 + 3f^2 + f}{6}$ bekommen, deren Hälfte $=$ $\frac{2f^3 + 3f^2 + f}{12}$; und da die Summe der Seiten der Dreiecke oder Lagen gleich der Grund-

flä-

fläche = $\frac{f^2 + f}{2}$, deren Hälfte = $\frac{f^2 + f}{4}$; so können wir in der obigen Gleichung die Wehrte von beiden setzen, so bekommen wir

$$\frac{2f^3 + 3f^2 + f}{12} + \frac{f^2 + f}{4} =$$

$$\frac{2f^3 + 3f^2 + f + 3f^2 + 3f}{12} =$$

$$\frac{2f^3 + 6f^2 + 4f}{12} = \frac{f^3 + 3f^2 + 2f}{6}$$ für die Summe aller Dreiecke oder Lagen der Pyramide.

Zerteilen wir endlich diesen Ausdruck noch in seine Faktores, so ist $\frac{f^2 + f}{2} \times \frac{f + 2}{3}$ = der Anzahl der Kugeln, so in der dreieckigten Pyramide enthalten sind.

Z. B. Wenn die Seite einer solchen dreieckigten Pyramide = f, 6 Kugeln enthält, so ist die Zahl der gesamten Kugeln =

$$\frac{36 + 6}{2} \times \frac{6 + 2}{3} = 56.$$

Aufgabe.

§. 278. Die Anzahl Kugeln, so in einer länglich viereckigten Pyramide, oder in einem dreieckigten Prisma Fig. 3. aufgeschlichtet sind, zu berechnen.

Auflösung. Wenn man die Kugelschlichtung Fig. 3. betrachtet, so findet man, daß solche

1. Aus einer viereckigten Pyramide ABCDE, und

2. Aus dem schrägen Prisma GFKHLI zusammen gesetzet sei.

Wenn man demnach zuerst von der Pyramide die Seite EC = f kennet, so haben wir auch nach der Aufgabe §. 276. ihren ganzen Inhalt = $\frac{f^2 + f}{2} \times \frac{2f + 1}{3}$.

Was das schräge Prisma betrift, so bestehet solches aus eben so viel Dreiecken, wie KFL, als Kugeln auf dem obern Rande LI liegen, weniger Einer, welche bereits zu der vorigen Pyramide gehöret.

Nun ist aber nach §. 277. das Dreieck KFL, dessen Seite f bekant = $\frac{f^2 + f}{2}$, folglich bekommen wir den ganzen Inhalt von dem Prisma GFKHLI, wenn wir das Dreieck KFL durch LI = c, das ist, der Anzahl Kugel, so auf dem obern Rande liegen, weniger Einer, multipliciren, welches giebt

$$\frac{cf^2 + cf}{2}.$$

Addiren wir demnach diese beide Produkte zusammen, so haben wir den Kugelinhalt der ganzen Kugelschlichtung =

$$\frac{f^2+f}{2} \times \frac{2f+1}{3} + \frac{cf^2+cf}{2} =$$

$$\frac{2f^3+3f^2+f}{6} + \frac{cf^2+cf}{2} =$$

$$\frac{2f^3+3f^2+f+3cf^2+3cf}{6}$$; welches Produkt in die zween Faktores

$$\frac{f^2+f}{2} \times \frac{3c+2f+1}{3}$$ zergliedert werden kan, welche den Inhalt des Prisma KFCEDL geben.

3. B. Es sei die Anzahl Kugeln an der Seite EC = 6, und die auf dem obern Rande LI = 8, so ist die Anzahl der in der Schlichtung enthaltenen Kugeln =

$$\frac{36+6}{2} \times \frac{24+12+1}{3} = 259.$$

Zusaz.

§. 279. Man kan den zweiten Faktor dieser Formul als die mittlere arithmetische Proportional zwischen den drei Seiten FC, LD und KE ansehen, welche hierauf durch das Dreieck FLK multipliciret wird, nach welchem Grunde auch in der Geometrie der kubische In-

Inhalt eines schrägen Prisma berechnet zu werden pfleget, wie an seinem Orte wird gezeiget werden.

Zusaz.

§. 280. Ist zwischen zwo Pyramiden ein Prisma geschlichtet worden, wie Fig. 4. so berechnet man erst die zwo Pyramiden besonders; hierauf suchet man das Dreieck $\frac{c^2+c}{2}$ des Prisma und multipliciret es durch den dritten Teil der Summe der drei langen Seiten b, b, und d, das ist mit $\frac{2b+d}{3}$ des Prisma.

Damit man bei vorfallender grosser Eilfertigkeit sich nicht lange mit der Rechnung aufzuhalten benöthiget sei, so wird zur Bequemlichkeit alhier eine Tabelle für die drei und viereckigte Pyramiden, deren Seiten von 1. bis 46. Kugeln steigen, beigefüget, woraus man den Inhalt derselben unmittelbar findet. Da aber eine solche Tabelle sehr weitläuftig fallen würde, wenn sie auch auf die sogenanten länglichte Pyramiden ausgedehnet würde, so ist solche mit Fleis alhier übergangen worden.

In-

Inhalt,
der dreieckigten Kugel-Pyramiden.

Kugeln.			Kugeln.		
Seite	Grund-Fläche.	Inhalt der Pyramid.	Seite	Grund-Fläche.	Inhalt d. Pyramid.
1	1	1	24	300	2600
2	3	4	25	325	2925
3	6	10	26	351	3276
4	10	20	27	378	3654
5	15	35	28	406	4060
6	21	56	29	435	4495
7	28	84	30	465	4960
8	36	120	31	469	5456
9	45	165	32	528	5984
10	55	220	33	561	6545
11	66	286	34	595	7140
12	78	364	35	630	7770
13	91	455	36	666	8436
14	105	560	37	703	9139
15	120	680	38	741	9880
16	136	816	39	780	10660
17	153	969	40	820	11480
18	171	1140	41	861	12341
19	190	1330	42	903	13244
20	210	1540	43	946	14190
21	231	1771	44	990	15180
22	253	2024	45	1035	16215
23	276	2300	46	1081	17296

Inhalt,

der viereckigten Kugel-Pyramiden.

Kugeln.			Kugeln.		
Seite	Grund-Fläche.	Inhalt der Pyramid.	Seite	Grund-Fläche.	Inhalt d. Pyramid.
1	1	1	24	576	4900
2	4	5	25	625	5525
3	9	14	26	676	6201
4	16	30	27	729	6930
5	25	55	28	784	7714
6	36	91	29	841	8555
7	49	140	30	900	9455
8	64	204	31	961	10416
9	81	285	32	1024	11440
10	100	385	33	1089	12529
11	121	506	34	1156	13685
12	144	650	35	1225	14910
13	169	819	36	1296	16206
14	196	1015	47	1369	17575
15	225	1240	38	1444	19019
16	256	1496	39	1521	20540
17	289	1785	40	1600	22140
18	324	2109	41	1681	23821
19	361	2470	42	1764	25585
20	400	2870	43	1849	27434
21	441	3311	44	1936	29370
22	484	3795	45	2025	31395
23	529	4324	46	2116	33511

Ach-

Achtes Hauptstück.

Von den Logarithmen.

Erklärung.

§. 281.

Wenn man unter die Glieder einer geometrischen Progression die Glieder einer arithmetischen Progression der Ordnung nach schreibet, so heissen die leztern die **Logarithmen** der erstern.

Man setze die zwo Progressionen:

Geometrisch:

1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 u. s. w.

Arithmetisch:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. w.

So ist 0 der Logarithmus

von 1; 3 von 8; 5 von 32. u. s. w.

Der Nutzen und Endzweck der Logarithmen bestehet darin, daß dadurch viele besonders in der Trigonometrie vorkommende beschwerliche Rechnungen erleichtert werden sollen. Denn da in den arithmetischen Verhältnissen, Proportionen und

Pro-

Progressionen dasjenige durch die blosse Addition und Subtraktion verrichtet wird, was in der geometrischen durch die Multiplikation und Divisionen geschehen müste; §. 272. so wird unstreitig die Rechnung mit grossen Zahlen sehr verkürzet, wenn anstaat der beiden lezten Rechnungsarten die zwo ersten gebraucht werden können.

In dem folgenden werden wir zeigen, daß dieses durch die Logarithmen geschehen könne, und in dieser Absicht sind sie erfunden und eingeführet worden. Nun ist zwar der gegebene Begrif der Logarithmen algemein, und erstrecket sich auf alle geometrische und arithmetische Progressionen, die auf die gehörige Art unter einander geschrieben werden, was auch die erstern für einen Exponenten und die leztern für einen Unterschied haben mögen; allein da es zu Erreichung des Endzweckes der Logarithmen keinesweges gleichgültig ist, was für eine Gestalt sie bekommen, so hat man bei Einführung derselben ihnen eine ganz besondere Einrichtung geben müssen, so wir gegenwärtig näher erklären wollen.

Wilkührlicher Saz.

§. 282. Die in den Tafeln enthaltene und eingeführte Logarithmen sind auf folgende Art eingerichtet.

1. Man hat eine geometrische Progression angenommen, deren erstes Glied = 1, und der Exponente = 10 ist, so daß die Glieder

nach

nach dem zehnteiligen Maasse §. 25. der Zahlen steigen.

Die arithmetische Progression aber, deren Glieder die Logarithmen der ersten werden sollen, fänget von 0 an, und der Unterschied der Glieder ist = 1, so daß solche in ihrer natürlichen Ordnung wachsen; nehmlich folgendergestalt:

Geometrisch:

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 u. s. w.

Logarithmisch:

0, 1, 2, 3, 4, 5,

Wenn daher die Glieder der ersten um eine Ziffer oder Nulle wachsen, oder mit 10 multipliciret werden, so nehmen die Logarithmen nur um eine Einheit zu; und ein ieder Logarithmus bestehet aus so viel Einheiten, als die Glieder der geometrischen Progression Nullen bei sich führen.

2. Weil es aber zu dem eigentlichen Endzwecke wenig nützen würde, wenn man blos zu dem vorgemeldeten Gliedern der geometrischen Progression nicht aber auch zu den dazwischen fallenden natürlichen Zahlen die Logarithmen hätte, diese Zahlen aber in keiner geometrischen Proportion stehen, so hat man zu Bestimmung ihrer Logarithmen sich folgendes Mittels bedienet.

Zu-

Zuerst hat man sowohl an die Glieder der geometrischen Progression, als auch an ihre Logarithmen 7 Nullen gehänget, oder solche auf einen Decimalbruch gesetzet, um die dazwischen fallende Zahlen desto richtiger zu bekommen, besonders da die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 10, zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000 u. s. w. nicht anders als Brüche oder mit Brüchen verbunden sein können, wodurch sie folgende Gestalt erhalten:

Proportionalzahlen.	Logarithmen.
1,0000000	0,0000000
10,0000000	1,0000000
100,0000000	2,0000000
1000,0000000	3,0000000
10000,0000000	4,0000000
u. s. w.	

Hierauf hat man zwischen den zwo Zahlen 1 und 10 so lange mitlere geometrische Proportionalen gesuchet, bis solche so genau als möglich, mit den natürlichen Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 übereingestimmet. In eben dieser Ordnung hat man nun auch zwischen den Logarithmen von 1 und 10 d. i. zwischen 0,0000000 und 1,0000000 eben so viele mitlere arithmetische Proportionalen gesuchet, und diejenigen derselben, so in der Ordnung dieses Verfahrens zu den vorigen mit-

lern

lern geometrischen Proportionalen gehörig gewesen, sind die Logarithmen derselben geworden; wodurch man zu den natürlichen Zahlen von 1 bis auf 10 folgende Logarithmen erhalten:

Natürliche Zahlen.	Logarithmen.
1	0,0000000
2	0,3010300
3	0,4771213
4	0,6020600
5	0,6989700
6	0,7781512
7	0,8450980
8	0,9030900
9	0,9542425,
10	1,0000000.

Auf eine gleichförmige Art ist man nun auch in Berechnung der Logarithmen für die übrige Zahlen, so zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000 u. s. w. fallen, verfahren, und daraus sind dann diejenige Tafeln entstanden, so unter dem Nahmen der Logarithmen bekant sind, in welchen durch die Benennung der **natürlichen Zahlen** (numeri naturales) sowohl die Glieder der geometrischen Progression selbsten, als auch alle dazwischen gehörige Zahlen und Einheiten verstanden werden, deren zugehörige Logarithmen ihnen gegenüber gesetzet sind.

In

In den gewöhnlichen Tafeln findet man diese Logarithmen für die natürlichen Zahlen bis auf 10000, in den Rivardischen bis auf 20000 und in den Englischen von Gardiner bis über 100000. Da die Bearbeitung derselben eine ganz ausserordentliche Mühe, Zeit und Geduld erfordert, so ist nicht leicht zu vermuthen, daß sich ein Anfänger an die Fortsetzung derselben wagen werde, und daher haben wir uns alhie auch begnüget, die blosse Möglichkeit der Berechnung davon zu zeigen, die weitere Anleitung dazu aber volständigern mathematischen Abhandlungen, worin sie anzutreffen ist, überlassen.

Zusatz.

§. 283. 1. Die erste Ziffer eines Logarithmus, so durch einen (,) von den übrigen abgesondert ist, wird die **Kennziffer** (characteristica) genennet, und ist eigentlich der Logarithmus des nächst kleinern Zeheners, die übrige darauf folgende Ziffern aber zeigen den Decimalbruch an, um welchen der Logarithmus für eine Zahl zwischen zweien Zehenern noch grösser sein mus.

So ist z. B. in dem Logarithmus von der Zahl 7 = 0,8450980 die erste Ziffer 0, die Charakteristik, und die übrigen sind der Decimalbruch, weil eigentlich 0 der Logarithmus von 1 ist.

Ferner in dem Logarithmus von 446 = 2,6493349 ist 2 die Charakteristik, nehmlich der

würk=

würkliche Logarithmus von 100. Da aber die Zahl 446 zwischen 100 und 1000 fält, so mus zu dem Logarithmus 2, noch ein Decimalbruch hinzu kommen, der zu dieser Zwischenzahl gehöret.

2. Vermöge der Einrichtung beider Progressionen und da die Logarithmen von 0 anfangen, mus die Charakteristik eines ieden Logarithmus aus so viel Einheiten weniger eine bestehen, als dessen zugehörige natürliche Zahl Ziffern enthält; und so oft die Glieder der geometrischen Proportion oder die natürliche Zahlen selbsten um eine Ziffer steigen, oder mit 10 multipliciret werden, so oft wächset die Charakteristik ihres Logarithmus um Eins.

Aus diesem Grunde wird sie auch die Kenziffer genant, weil man sogleich daraus erkennen kan, zu was für einer Gattung von Zehenern die ihr zugehörige Zahl gehöre; und umgekehrt, aus der Anzahl der Ziffern einer natürlichen Zahl kan bestimmet werden aus wie viel Einheiten die Charakteristik ihres Logarithmus bestehen müsse.

Z. B. Ist die Charakteristik 0, so fält die Zahl zwischen 1 und 10, ist sie 3 so fält sie zwischen 1000 und 10000 u. s. w. hat im Gegenteil die natürliche Zahl 6 Ziffern, so ist die Charakteristik des Logarithm. = 5, von 10 Ziffern = 9 u. s. w.

3. Hieraus folget auch noch, daß eine iede zehnmal vermehrte natürliche Zahl eben den Logarithmus haben müsse, den die einfache Zahl gehabt hat, nur mit dem Unterschiede, daß die Charakteristik bei ieder zehnfachen Vermehrung um 1. wachsen müsse.

So ist z. B. der Logarithmus
von 9 = 0,9542425; von
von 9 × 10 = 90 = 1,9542425;
von 90 × 10 = 900 = 2,9542425; und
von 900 × 10 = 9000 = 3,9542425; und
so mit den übrigen.

Gebrauch der logarithmischen Tafel.

Aufgabe.

§. 284. Den Logarithmus eines eigentlichen Bruches zu finden.

Auflösung. 1. Suchet den Logarithmus des Zählers aus der Tafel desgleichen auch den Logarithmus des Nenners.

2. Subtrahiret den ersten von den leztern, so ist der Unterschied davon, welcher negativ angesetzet werden mus, der Logarithmus des Bruches.

Beweis. Da ein ieder Bruch eine Division ist, worin der Zähler durch den Nenner dividiret wird, §. 82. durch die Logarithmen aber die Division in die Subtraktion verwan-

delt wird §. 281. (wie im folgenden unabhängig von diesem Satze wird bewiesen werden) so mus auch dabei der Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers abgezogen werden; und folglich ist der Unterschied beider Logarithmen der Logarithmus des Bruches. Da aber der Logarithmus des Nenners in einem eigentlichen Bruche grösser ist als der Logarithmus des Zählers, so kan dieser Unterschied nicht anders als negativ werden, §. 70.

Z. B. Man verlanget den Logarithmus von $\frac{2}{3}$ so ist

Logar. von 3 =	0,4771213
Logar. von 2 =	0,3010300
Logar. von $\frac{2}{3}$ = —	0,1760913

Oder man verlangt den Logarithmus von 0,037, so ist

Logar. von 1000 =	3,0000000
Logar. von 37 =	1,5682017
Logar. von 0,037 = —	1,4317983.

Der Grund, daß der Logarithmus eines ieden Bruches negativ werde, kan auch noch folgendergestalt erleutert werden.

1. Weil ein ieder wahrer Bruch kleiner als die Einheit ist, so mus auch der Logarithmus des Bruches kleiner als der Logarithmus der Einheit werden. Nun ist der Logarithmus des leztern = 0, folglich mus der Logarithmus des erstern kleiner als 0, das ist verneinend sein.

2. Weil in dem erstern Beispiele $\frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$, so mus man auch um den Logarithmum von $\frac{2}{3}$ zu bekommen, den Logarithmum von $\frac{3}{2}$ vom Logarithmus der Einheit abziehen, so bekomt man 0,0000000 — 0,1760913, folglich wird er negativ.

Wenn dergleichen verneinende Logarithmen in den Rechnungen vorkommen, so ist eben so damit zu verfahren, wie mit den negativen Grössen überhaupt, das ist, wenn er subtrahiret werden solte, so wird das Zeichen — in + verwandelt, und wenn er addiret werden solte, so verbleibet das Zeichen — §. 70. 71.

Aufgabe.

§. 285. Den Logarithmus einer ganzen Zahl nebst einem Bruche zu finden.

Auflösung. Setzet die gegebene Zahl auf einen uneigentlichen Bruch §. 81. Num. 2.

2. Subtrahiret den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers, so ist ihr Unterschied der gesuchte Logarithmus der gegebenen Zahl. Der Grund davon ist schon in dem Beweise bei §. 284. angeführet worden.

Z. B. Es wäre der Logarithmus von $12\frac{3}{8}$ zu suchen, so setzet an dessen staat $\frac{99}{8}$.

Logar. von 99 = 1,9956352
Logar. von 8 = 0,9030900
Logar. von $12\frac{3}{8}$ = 1,0925452.

Oder:

Oder: Wenn die gegebene ganze Zahl so gros ist, daß bei der Verwandelung in einen uneigentlichen Bruch ihr Zähler grösser würde, als die in den Tafeln enthaltene gröste Zahl, und folglich ihr Logarithmus nicht mehr darin gefunden werden könte, so kan man sich folgender Auflösung bedienen.

1. Suchet zuerst den Logarithmus der ganzen Zahl, und zugleich auch den Unterschied desselben von dem nächst grössern.

2. Schliesset hierauf nach der Regel de Tri: wie der Nenner des gegebenen Bruches zu seinem Zähler, so verhält sich der gefundene Unterschied der Logarithmen zur vierten Zahl welche hierauf zum Logarithmus der Ganzen addiret wird.

Z. B. Man hätte zu $17342\frac{24}{38}$ den Logarithmus zu suchen: so ist der Logarithmus von $17342 = 4{,}2390992$, und die Differenz zwischen den Logar. von 17342 und 17343 ist $= 250$; daher ist

$$38 : 24 = 250 : \frac{250 \times 24}{38} = 157$$

und $4{,}2390992 + 157 = 4{,}2391149$ ist der Logarithmus von $17342\frac{24}{38}$.

Oder: Wenn der bei der ganzen Zahl befindliche Bruch Decimal wäre, so suchet den Logarithmus davon, als ob der Bruch auch zu dem Ganzen gehörete: ziehet aber von der

Charakteristik des gefundenen Logarithmus so viele Einheiten ab, als der Decimalbruch Ziffern hat, so ist der Ueberrest der verlangte Logarithmus. §. 283. Num. 2. Wäre aber die Zahl samt dem Bruche zu gros, und nicht mehr in den Tafeln enthalten, so mus nach der vorigen Regel de Tri verfahren werden.

Z. B. Um den Logarithmus von 17,372 zu finden, so suchet ihn zuerst von 17372 = 4,2398498 in den Tafeln auf; verringert hierauf die Charakteristik um 3, so verbleibet nach 1,2398498, welches der verlangte Logarithmus ist.

Aufgabe.

§. 286. Den Logarithmus einer grössern Zahl zu finden, als in den Tafeln enthalten ist.

Auflösung. 1. Zergliedert die gegebene Zahl, wenn es thunlich, in Faktores, durch welche sie sich ohne Rest dividiren lässet.

2. Suchet die Logarithmen dieser Faktoren in den Tabellen.

3. Addiret sie zusammen, so ist ihre Summe der Logarithmus der gegebenen Zahl.

Beweis. Der Grund dieses Verfahrens beruhet abermals auf den Lehrsatz, daß mit den Logarithmen dasienige durch die Addition geschehe, was bei den natürlichen Zahlen durch die Multiplikation verrichtet werden mus.

Z. B. Es wäre von 107724 der Logarithmus zu suchen, so wird sich nach einigen Versuchen zeigen, daß sie sich durch 12 ohne Rest dividiren läst, und der andere Faktor 8977 sei.

Derowegen setzet:

Logar. von	8977	=	3,9531312
Logar. von	12	=	1,0791812
Logar. von	107724	=	5,0323124.

Oder: Wenn sich die gegebene Zahl in keine solche Faktoren zerlegen lässet.

1. Schneidet zur Rechten von der Zahl so viele Ziffern ab, daß ihr von dem Ueberreste wie auch von der nächst grössern Zahl noch die Logarithmen in den Tafeln finden könnet.

2. Vermehret die Charakteristik dieser Logarithmen um so viele Einheiten, als ihr zur Rechten Ziffern abgeschnitten §. 283.

3. Suchet ihre Differenz.

4. Ziehet gleichfals die natürliche Zahlen zu welchen diese Logarithmen gehören, von einander ab, und merket ihre Differenz.

5. Schliesset hierauf nach der Regel de Tri. Wie die lezte Differenz zu der ersten, so verhalten sich die abgeschnittene Zahlen zu der vierte Proportional.

6. Diese addiret zu dem schon gefundenen Logarithmus, so habt ihr den Logarithmus der anverlangten Zahl.

Z. B. Es sol der Logarithmus von 357859 gefunden werden, so schneidet die zwo Ziffern 59 zur rechten ab.

Der Logarithmus von 3578
ist in den Tafeln. . . . . = 3,5536403
und von der nächst grössern Zahl = 3,5537617
Weil nun zwo Ziffern zur Rechten abgeschnitten worden, so vermehret die Charakteristick um zwo Einheiten, so ist

5,5537617	Logar. von	357900	
5,5536403	Logar. von	357800	
1214	Untersch. der Logarithm.	100	Untersch. der der Zahlen.

Demnach schliesset: 100 : 1214 =

$$59 : \frac{1214 \times 59}{100} = 716.$$

Addiret diese zu 5,5536403, so ist die
Summe 5,5537119 der Logarithmus
von 357859

Oder: Wäre bei der gegebenen Zahl, so ihrer Grösse wegen nicht mehr in den Tafeln enthalten, noch ein Bruch befindlich, so wird der Logarithmus dazu auf folgende Art gefunden.

1. Suchet nach vorbeschriebener Art den Logarithmus zu den Ganzen allein ohne Bruch,

des=

desgleichen auch den Logarithmus von der nächst grössern natürlichen Zahl.

2. Ziehet beide Logarithmen von einander ab, um ihre Differenz zu bekommen.

3. Schliesset hierauf nach der Regel de Tri: wie der Nenner des gegebenen Bruchs zu seinem Zähler, so verhält sich die Differenz der Logarithmen, zu der vierten Proportional.

4. Addiret solche zu dem Logarithmus der ganzen gegebenen Zahl, so ist die Summe der gesuchte Logarithmus.

Es ist zwar nicht zu laugnen, daß die erste Art, den Logarithmus einer Zahl aus der Zerlegung in seine Faktoren zu finden, der zwoten, worin die Regel de Tri gebrauchet wird, wegen der Richtigkeit und mathematischen Schärfe vorzuziehen sei, indessen ist doch auch die leztere ohne merklichen Fehler in der Ausübung zu gebrauchen, indem die Unrichtigkeit nur bei der lezten Ziffer des Logarithmus in einigen Einheiten bestehen kan, so ohne allen besorglichen Irtum sicher übergangen werden können.

Aufgabe.

§. 287. Zu einem Logarithmus, dessen Charakteristik und die erstern Ziffern zwar in den Tafeln enthalten, die übrige Ziffern aber mit keinem Logarithmus übereinstimmen, die zugehörige natürliche Zahl zu finden.

Auflösung. Wenn sich die Charakteristik und die erstere Ziffern von einem gegebenen Logarithmus zwar in den Tafeln befinden, die übrigen aber nicht, so fält die dazu gehörige natürliche Zahl zwischen den beiden, so zu dem nächst kleinern und nächst grössern Logarithmen gehörig sind, folglich grösser als die erstere und kleiner als die leztere, das ist die kleinere Zahl selbst mit einem Bruche sein müsse. Um nun diesen Bruch zu finden, so verfahret folgendergestalt:

1. Suchet die natürliche Zahl zu dem nächst kleinern Logarithmus aus den Tafeln.

2. Nehmet den Unterschied zwischen dem nächst kleinern und nächst grösserm Logarithmus.

3. Ziehet den nächst kleinern Logarithmus von dem gegebenen ab, um auch ihren Unterschied zu haben, so wird die erstere der Nenner, und der leztere der Zähler von dem gesuchten Bruche sein.

Z. B. Es wäre der Logarithmus 3,8695422 gegeben, so ist dessen nächst kleinerer Logar. 3,8695251
von 7405 und ihr Unterschied. . . . . 171 Zähler des Bruchs.

Der nächst grössere Logarithmus 3,8695837
Der nächst kleinere. 3,8695251
Und ihr Unterschied. . . . . 586 Nenner des Bruchs.

Folg-

Folglich ist die natürliche Zahl des gegebenen Logarithmus = 7405 [illegible].

Oder: Wil man den bei der natürlichen Zahl befindlichen Bruch in Decimalen haben, so verfahret auf folgende Art.

1. Vermehret die Charakteristik des gegebenen Logarithmus um so viel Einheiten, als der Nenner des Decimalbruches Nullen bekommen sol, und suchet dessen natürliche Zahl in den Tafeln auf, so nahe man sie finden kan.

2. Schneidet von dieser natürlichen Zahl rechts so viel Ziffern ab, um so viele Einheiten die Charakteristik vermehret worden; so werden die zur Linken stehende Ziffern die Ganzen, die zur Rechten aber den Zähler des Decimalbruches der verlangten natürlichen Zahl des gegebenen Logarithmus sein.

Z. B. Es wird der Logarithmus 2,2753976 gegeben, so sich nicht genau in den Tafeln findet; man verlanget den Bruch so die zugehörige Zahl mit sich führet, in Decimalen zu finden, wovon der Nenner 100 ist. Vermehret demnach die Charakteristik um 2, so ist der Log. 4,2753976, dessen in den Tafeln angesezte natürliche Zahl bei nahe 18853 ist; schneidet nun hievon Rechts zwo Ziffern ab, so ist die gesuchte natürliche Zahl 188, 53, dessen Bruch nicht um $\frac{1}{100}$ der Einheit fehlet.

Die leztere Art, die mit einem Bruch behaftete natürliche Zahl von einem gegebenen Logarithmus

zu

zu finden, ist richtiger als die erstere, bei welcher vorausgesetzet wird, daß die Unterschiede der Logarithmen beständig gleich sind, da sie doch stufenweise mehr und mehr abnehmen; daher sie auch besonders bei kleinen natürlichen Zahlen, bei welchen die Unterschiede der Logarithmen am merklichsten ungleich sind, nicht die volkommenste Richtigkeit geben kan. Jedoch ist der Abweichungsfehler nach beiden Arten noch allezeit sehr geringe, und um so geringer, ie grösser die natürliche Zahl ist.

Aufgabe.

§. 288. Zu einem gegebenen verneinenden Logarithmus die zugehörige natürliche Zahl oder vielmehr Bruch §. 284. zu finden.

Auflösung. Suchet den verneinenden Logarithmus in den Tafeln auf, als wenn er beiahend wäre, so ist die dazu gehörige natürliche Zahl der Nenner, und 1 der Zähler des gesuchten Bruches.

Z. B. Es sei der Logar. — 2,3856243 gegeben, so ist die natürliche Zahl, so zu demselben positiv betrachtet, gehöret, bei nahe 243; daher ist der dadurch angezeigte Bruch $= \frac{1}{243}$.

Oder: Verlanget man aber den Bruch in Decimalen, so nehmet den Logarithmus von 10, 100, 1000 u. s. w. nachdem der Nenner des Bruches bestimmet wird, addiret hiezu den gegebenen Logarithmus, oder vielmehr da sol-

cher negativ ist, so subtrahiret ihn davon §. 70. Von der Summe oder vielmehr von dem Unterschiede suchet die natürliche Zahl in den Tafeln, welcher der Zähler, die Zahl 10, 100, 1000 u. s. w. aber der Nenner des gesuchten Bruches sein wird.

Z. B. Man suchte zu dem Logar. — 1,5327325 einen Decimalbruch, dessen Nenner 1000 ist, so ist 3,0000000 — 1,5327325 = 1,4672675, dessen natürliche Zahl in den Tafeln bei nahe = 29; folglich ist der gesuchte Bruch = $\frac{29}{10000}$ = 0029.

Aufgabe.

§. 289. Zu einem gegebenen grössern Logarithmus, als in den Tafeln enthalten, die zugehörige natürliche Zahl zu finden.

Auflösung. 1. Vermindert die Charakteristik um so viele Einheiten, bis solche in den Tafeln enthalten ist.

2. Sind alsdann die übrige Ziffern des Logarithmus genau darin anzutreffen, so setzet der daneben stehenden natürlichen Zahl so viele Nullen zu, als man der Charakteristik Einheiten abgenommen hat, so habt ihr die gesuchte natürliche Zahl gefunden §. 283.

Z. B. Es wäre der Logar. 6,2157169 gegeben, welcher, wenn die Charakteristik um 2 vermindert wird, giebet 4,2157169, wovon die natürliche

Zahl

Zahl in den Tafeln = 16433 angegeben wird; vermehret man nun solche mit zwo Nullen, so ist 1643300 die gesuchte Zahl des gegebenen Logarithmus.

Oder: Solte der auf diese Art an der Charakteristik verminderte Logarithmus dennoch nicht genau in den Tafeln anzutreffen sein, so ist es ein Zeichen, daß die natürliche Zahl desselben einen Bruch bei sich habe, welchen ihr zuerst nach §. 287. suchet, und hierauf sowohl zu der ganzen Zahl als auch zu dem Zähler des Bruches so viele Nullen hinzufüget, um so viele Einheiten die Charakteristik vermindert worden.

Z. B. Es sei der gegebene Logar. = 6,2428795, wird seine Charakteristik um 2 vermindert, so bekomt man 4,2428795, und zu dessen nächst kleinern natürlichen Zahl 17493.

Der Unterschied zwischen dem Logar. von 17493 und dem von 17494 ist 248.

Der Unterschied zwischen dem verminderten Logar. und dem nächst kleinern ist 152.

Folglich ist die zu dem verminderten Logarithmus gehörige natürliche Zahl samt dem Bruche = $17493\frac{152}{248}$ und zu dem gegebenen unveränderten Logarithmus = $1749300\frac{15200}{248}$, welche, wenn die Ganzen aus dem Bruche gesuchet werden, sein wird = $1749361\frac{72}{248}$.

Ob-

Obgleich der vornehmste Gebrauch der Logarithmen sich in den trigonometrischen Rechnungen zeiget, wo die Logarithmen der Sinus, Tangenten und Secanten noch eine weitere Erklärung erfordern, so kan solche doch alhie noch nicht berühret werden, da die dazu nöhtige Kentnisse noch ermangeln, sondern mus bis in die Geometrie versparet werden.

Anwendung der Logarithmen zu den verschiedenen Rechnungsarten.

Lehrsatz.

§. 290. Wenn die Logarithmen nach §. 282. eingerichtet sind, so sind sie die Exponenten der Potenz auf welcher die Exponenten der zugehörigen geometrischen Progression in iedem Gliede erhoben worden.

Beweis. Denn man setze die geometrische Progression sei:

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 u. s. w. wovon der Exponent = 10, so kan man nach §. 253. an deren staat setzen:

$1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7$ u. s. w.

Logarithmus:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. w.

wo demnach die Logarithmen dem Exponenten der Potenz von dem Exponenten 10 in iedem zugehörigen Gliede der geometrischen Progression gleich sind.

Zu-

Zusatz.

§. 291. Da überhaupt bei der Multiplikation zwoer Grössen von einerlei Wurzel nur ihre Exponenten zusammen addiret werden dürfen, und die Summe derselben der Exponent des Produkts ist, §. 73. 124. so dürfen auch bei der Multiplikation zweier Glieder einer geometrischen Progression durch einander nur ihre Exponenten zusammen addiret werden, um den Exponenten des Produkts zu bekommen. Nun sind die Logarithmen diese Exponenten ihrer zugehörigen Glieder der geometrischen Progression §. 290. oder der natürlichen Zahlen §. 282. folglich um das Produkt zwoer natürlichen Zahlen zu bekommen, darf man nur ihre Logarithmen zusammen addiren, so ist ihre Summe der Logarithmus des Produkts; und auf diese Art wird die Multiplikation durch die Logarithmen in eine blosse Addition verwandelt.

Z. B. Man verlangt die zwo Zahlen 3725 und 2392 durch einander zu multipliciren, so nehmet ihre Logarithmen aus den Tafeln, addiret sie zusammen, so ist die Summe derselben der Logarithmus des Produkts, welchen ihr wieder in den Tafeln aufzusuchen habet: nehmlich

Logar. von	3725	=	3,5711263
Logar. von	2392	=	3,3787612
Logar. von	8900200	=	6,9498875.

Das

Haben die natürliche Zahlen Brüche bei sich, oder die Summe der Logarithmen wird grösser, als daß sie in den Tafeln enthalten wäre, so hat man nach dem §. 285. und 289. zu verfahren.

Dieser ganze Vorteil der Verwandelung der Multiplikation in die Addition würde nicht mehr staat finden, wenn nicht die geometrische Progression oder die natürliche Zahlen von 1. und die Logarithmen von 0 anfiengen, und aus diesem Grunde haben die gebräuchliche Logarithmen die §. 282. beschriebene Gestalt bekommen.

Zusatz.

§. 292. Da man ferner bei der Division zwoer dergleichen Grössen nur die Exponenten von einander abziehen darf, um den Exponenten des Quotienten zu bekommen §. 77. und 124. so darf man auch bei der Division zweier Glieder einer geometrischen Progression nur ihre Exponenten der Potenz von einander abziehen, so wird der Ueberrest der Exponent des Quotienten sein. Nun aber sind die Logarithmen die Exponenten der Glieder einer geometrischen Progression, oder der natürlichen Zahlen §. 290. 282. folglich darf man bei der Division der natürlichen Zahlen nur den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendus abziehen, so ist der Ueberrest der Logarithmus des Quotienten.

Z. B. Es sei die Zahl 14052 durch 2342 zu dividiren, so suchet von beiden die Logarithmen in den Tafeln auf, und ziehet sie von einander ab, so ist der Ueberrest der Logarithmus des Quotienten; nehmlich:

Logar. von 14052 = 4,1477381
Logar. von 2342 = 3,3695869
Logar. von 6 dem Quot. = 0,7781512

Auf diese Art wird die gewöhnliche Division der Zahlen vermittelst der Logarithmen in eine blosse Subtraktion verwandelt.

Zusatz.

§. 293. Da die Erhebung einer Zahl zu einer gegebenen Potenz nichts anders ist, als eine Multiplikation der Wurzel durch sich selbst, die so oft wiederholet wird, als der Exponent der Potenz anzeiget, §. 115. 117. Die Multiplikation aber vermittelst der Addition der Logarithmen geschehen kan, §. 291. so kan auch die Erhebung einer Zahl zu einer gegebenen Potenz geschehen, wenn der Logarithmus der Wurzel so oft genommen wird, als der Exponent der Potenz anzeiget, oder wenn er mit diesem Exponenten multipliciret wird, wo alsdann das Produkt der Logarithmus der verlangten Potenz sein wird.

Wenn daher eine Zahl zum Quadrat, zum Cubus, zur vierten, fünften u. s. w. Potenz erhoben werden sol, so multipliciret den Logarithmus davon, durch 2, 3, 4, 5 u. s. w.

Z. B.

Z. B. Es wäre die Zahl 315 zum Quadrat zu erheben, so ist der Log. von 315 = 2,4983106
Multipliciret mit 2
Logarithmus des Quadrats . . = 4,9966212,
worin die natürliche Zahl oder das Quadrat selbsten = 99225.

Zusatz.

§. 294. Im Gegenteile wird aus gleicher Ursache wird also auch der Logarithmus einer verlangten Wurzel aus einer gegebenen Potenz gefunden, wenn der Logarithmus dieser Zahl mit dem Exponenten der verlangten Wurzel dividiret wird.

Ist demnach aus einer Zahl die Quadrat, Cubikwurzel u. s. w. auszuziehen, so wird der Logarithmus dieser Zahl mit 2, 3 u. s. w. dividiret, und der Quotient ist der Logarithmus der Wurzel.

Z. B. Es sei aus der Zahl 13824 die Cubikwurzel zu ziehen, so ist der
Logar. von 13824 = 4,1406337
Dividiret durch 3
Log. der Cubikwurzel = 1,3802112, wovon die natürliche Zahl = 24.

Auf diese Art kan auch bei grossen Zahlen die Ausziehung der Wurzel erleichtert werden, wenn aus den ersten Ziffern der gegebenen Zahl zur Linken so weit als die in den Tafeln enthaltene Logarithmen reichen, vermittelst derselben die Wurzel ge-

suchet, und hierauf erst die Rechnung nach der gewöhnlichen Art fortgesetzet wird.

Zusaz.

§. 295. Da demnach durch die Logarithmen die Multiplikation in eine Addition, und die Division in eine Subtraktion verwandelt wird, so wird hiedurch nicht nur bei grossen Zahlen die Rechnung ungemein erleichtert, sondern auch, da die Regel de Tri nichts anders als die Multiplikation der mitlern Glieder, und eine Division des Produkts mit dem ersten Gliede anverlanget, so kan solche ebenfals auch durch die blosse Addition und Subtraktion der Logarithmen geschehen; wobei freilich zu wünschen wäre, daß zu Hebung aller Schwürigkeiten und mehrerer Erleichterung der Rechnungen die logarithmische Tafeln noch mehr erweitert sein möchten, als man sie gegenwärtig findet, welche Wohlthat indessen nur von einer äusserst mühsamen Hand, und bei nahe mehr als menschlichen Geduld erwartet werden kan.

Ende des ersten Teils.



Register

der in dem ersten Teil enthaltenen merkwürdigsten Sachen.



Daß



Zahl in den Tafeln = 16433 angegeben wird; vermehret man nun solche mit zwo Nullen, so ist 1643300 die gesuchte Zahl des gegebenen Logarithmus.

Oder: Solte der auf diese Art an der Charakteristik verminderte Logarithmus dennoch nicht genau in den Tafeln anzutreffen sein, so ist es ein Zeichen, daß die natürliche Zahl desselben einen Bruch bei sich habe, welchen ihr zuerst nach §. 287. suchet, und hierauf sowohl zu der ganzen Zahl als auch zu dem Zähler des Bruches so viele Nullen hinzufüget, um so viele Einheiten die Charakteristik vermindert worden.

Z. B. Es sei der gegebene Logar. = 6,2428795, wird seine Charakteristik um 2 vermindert, so bekomt man 4,2428795, und zu dessen nächst kleinern natürlichen Zahl 17493.

Der Unterschied zwischen dem Logar. von 17493 und dem von 17494 ist 248.

Der Unterschied zwischen dem verminderten Logar. und dem nächst kleinern ist 152.

Folglich ist die zu dem verminderten Logarithmus gehörige natürliche Zahl samt dem Bruche = $17493\frac{152}{248}$ und zu dem gegebenen unveränderten Logarithmus = $1749300\frac{15200}{248}$, welche, wenn die Ganzen aus dem Bruche gesuchet werden, sein wird = $1749361\frac{72}{248}$.

Obgleich der vornehmste Gebrauch der Logarithmen sich in den trigonometrischen Rechnungen zeiget, wo die Logarithmen der Sinus, Tangenten und Secanten noch eine weitere Erklärung erfordern, so kan solche doch alhie noch nicht berühret werden, da die dazu nöhtige Kentnisse noch ermangeln, sondern mus bis in die Geometrie verspart werden.

Anwendung der Logarithmen zu den verschiedenen Rechnungsarten.

Lehrsatz.

§. 290. Wenn die Logarithmen nach §. 282. eingerichtet sind, so sind sie die Exponenten der Potenz auf welcher die Exponenten der zugehörigen geometrischen Progreßion in iedem Gliede erhoben worden.

Beweis. Denn man setze die geometrische Progreßion sei:

1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 u. s. w. wovon der Exponent = 10, so kan man nach §. 253. an deren staat setzen:

$1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7$ u. s. w.

Logarithmus:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. s. w.

wo demnach die Logarithmen dem Exponenten der Potenz von dem Exponenten 10 in iedem zugehörigen Gliede der geometrischen Progreßion gleich sind.

Zu-

Zusatz.

§. 291. Da überhaupt bei der Multiplikation zwoer Grössen von einerlei Wurzel nur ihre Exponenten zusammen addiret werden dürfen, und die Summe derselben der Exponent des Produkts ist, §. 73. 124. so dürfen auch bei der Multiplikation zweier Glieder einer geometrischen Progression durch einander nur ihre Exponenten zusammen addiret werden, um den Exponenten des Produkts zu bekommen. Nun sind die Logarithmen diese Exponenten ihrer zugehörigen Glieder der geometrischen Progression §. 290. oder der natürlichen Zahlen §. 282. folglich um das Produkt zwoer natürlichen Zahlen zu bekommen, darf man nur ihre Logarithmen zusammen addiren, so ist ihre Summe der Logarithmus des Produkts; und auf diese Art wird die Multiplikation durch die Logarithmen in eine blosse Addition verwandelt.

Z. B. Man verlangt die zwo Zahlen 3725 und 2392 durch einander zu multipliciren, so nehmet ihre Logarithmen aus den Tafeln, addiret sie zusammen, so ist die Summe derselben der Logarithmus des Produkts, welchen ihr wieder in den Tafeln aufzusuchen habet: nehmlich

Logar. von	3725	=	3,5711263
Logar. von	2392	=	3,3787612
Logar. von	8900200	=	6,9498875.

Das

Haben die natürliche Zahlen Brüche bei sich, oder die Summe der Logarithmen wird grösser, als daß sie in den Tafeln enthalten wäre, so hat man nach dem §. 285. und 289. zu verfahren.

Dieser ganze Vorteil der Verwandelung der Multiplikation in die Addition würde nicht mehr staat finden, wenn nicht die geometrische Progression oder die natürliche Zahlen von 1. und die Logarithmen von 0 anfiengen, und aus diesem Grunde haben die gebräuchliche Logarithmen die §. 282. beschriebene Gestalt bekommen.

Zusatz.

§. 292. Da man ferner bei der Division zwoer dergleichen Grössen nur die Exponenten von einander abziehen darf, um den Exponenten des Quotienten zu bekommen §. 77. und 124. so darf man auch bei der Division zweier Glieder einer geometrischen Progression nur ihre Exponenten der Potenz von einander abziehen, so wird der Ueberrest der Exponent des Quotienten sein. Nun aber sind die Logarithmen die Exponenten der Glieder einer geometrischen Progression, oder der natürlichen Zahlen §. 290. 282. folglich darf man bei der Division der natürlichen Zahlen nur den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendus abziehen, so ist der Ueberrest der Logarithmus des Quotienten.

Z. B. Es sei die Zahl 14052 durch 2342 zu dividiren, so suchet von beiden die Logarithmen in den Tafeln auf, und ziehet sie von einander ab, so ist der Ueberrest der Logarithmus des Quotienten; nehmlich:

Logar. von 14052	=	4,1477381
Logar. von 2342	=	3,3695869
Logar. von 6 dem Quot.	=	0,7781512

Auf diese Art wird die gewöhnliche Division der Zahlen vermittelst der Logarithmen in eine blosse Subtraktion verwandelt.

Zusatz.

§. 293. Da die Erhebung einer Zahl zu einer gegebenen Potenz nichts anders ist, als eine Multiplikation der Wurzel durch sich selbst, die so oft wiederholet wird, als der Exponent der Potenz anzeiget, §. 115. 117. Die Multiplikation aber vermittelst der Addition der Logarithmen geschehen kan, §. 291. so kan auch die Erhebung einer Zahl zu einer gegebenen Potenz geschehen, wenn der Logarithmus der Wurzel so oft genommen wird, als der Exponent der Potenz anzeiget, oder wenn er mit diesem Exponenten multipliciret wird, wo alsdann das Produkt der Logarithmus der verlangten Potenz sein wird.

Wenn daher eine Zahl zum Quadrat, zum Cubus, zur vierten, fünften u. s. w. Potenz erhoben werden sol, so multipliciret den Logarithmus davon, durch 2, 3, 4, 5 u. s. w.

Z. B. Es wäre die Zahl 315 zum Quadrat zu erheben, so ist der Log. von 315 = 2,4983106
Multipliciret mit 2

Logarithmus des Quadrats . . = 4,9966212, worin die natürliche Zahl oder das Quadrat selbsten = 99225.

Zusatz.

§. 294. Im Gegenteile und aus gleicher Ursache wird also auch der Logarithmus einer verlangten Wurzel aus einer gegebenen Potenz gefunden, wenn der Logarithmus dieser Zahl mit dem Exponenten der verlangten Wurzel dividiret wird.

Ist demnach aus einer Zahl die Quadrat, Cubikwurzel u. s. w. auszuziehen, so wird der Logarithmus dieser Zahl mit 2, 3 u. s. w. dividiret, und der Quotient ist der Logarithmus der Wurzel.

Z. B. Es sei aus der Zahl 13824 die Cubikwurzel zu ziehen, so ist der
Logar. von 13824 = 4,1406337
Dividiret durch 3

Log. der Cubikwurzel = 1,3802112, wovon die natürliche Zahl = 24.

Auf diese Art kan auch bei grossen Zahlen die Ausziehung der Wurzel erleichtert werden, wenn aus den ersten Ziffern der gegebenen Zahl zur Linken so weit als die in den Tafeln enthaltene Logarithmen reichen, vermittelst derselben die Wurzel ge-

suchet, und hierauf erst die Rechnung nach der gewöhnlichen Art fortgesetzet wird.

Zusaz.

§. 295. Da demnach durch die Logarithmen die Multiplikation in eine Addition, und die Division in eine Subtraktion verwandelt wird, so wird hiedurch nicht nur bei grossen Zahlen die Rechnung ungemein erleichtert, sondern auch, da die Regel de Tri nichts anders als die Multiplikation der mitlern Glieder, und eine Division des Produkts mit dem ersten Gliede anverlanget, so kan solche ebenfals auch durch die blosse Addition und Subtraktion der Logarithmen geschehen; wobei freilich zu wünschen wäre, daß zu Hebung aller Schwürigkeiten und mehrerer Erleichterung der Rechnungen die logarithmische Tafeln noch mehr erweitert sein möchten, als man sie gegenwärtig findet, welche Wohlthat indessen nur von einer äusserst mühsamen Hand, und bei nahe mehr als menschlichen Geduld erwartet werden kan.

Ende des ersten Teils.



Register

der in dem ersten Teil enthaltenen merkwürdigsten Sachen.



Seite §

Daß



Seite §.



Glei-

Seite §.





Wie



In



Und



Aus



Seite §.

In



Und



Wie



Y Auf

In



Was



Verbesserungen.

Seite	Zeile	Lis	anstaat
21	26	Neun	Zehen.
62	22	$\frac{[ab+cd]\times[a+b]}{a+b}$	$\frac{[ab+cd]\times[a\times b]}{a+b}$
94	15	$13\frac{4}{5}$	$12\frac{4}{5}$
104	16	$32\frac{27}{100}$	$\frac{3227}{100}$
111	22	$\frac{43\times 144}{100}$	$\frac{44\times 144}{10}$
111	22	1 Linie	4 Linien
133	9	$\frac{296}{1000}$	$\frac{269}{1000}$
136	27	§. 141.	§. 142.
140	16	sehet	stehet
153	9	$6^{\frac{1}{2}}$	$6\frac{1}{2}$
157	1	$\frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$	$\frac{b}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$
167	6	ccbx	ccbd
221	12	$x^2-\frac{x}{3}$	$x-\frac{x}{3}$
221	13	$\frac{1}{6}$	$\frac{x}{6}$
255	15	300 ℔	30 ℔
255	16	$\frac{300\times 6}{120}$	$\frac{30\times 6}{120}$
270	15	$x=\sqrt[4]{\frac{a^2\ b}{a}}$	$x=\sqrt{\frac{a^2\ b}{a}}$

Nachricht an den Buchbinder:

Die Kupfertafel ist nach der Seite 298 einzuschalten.